Ottavio Serra

Sistemi lineari.

1°) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare 3x3 al variare del parametro reale k:

$A\underline{x} = \underline{b}$, con ${}^t\underline{x} = (x, y, z)$, ${}^t\underline{b} = (-1, 2, 4)$ e

$$A = \begin{matrix} 1, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 1 \\ 2, & 3, & k\,. \end{matrix}$$

Matrice $A|\underline{b}$ del sistema:

$$A|\underline{b} = \begin{pmatrix} 1;1;-1|-1 \\ 2;1;+1|2 \\ 2;3;k|+4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;1;-1|-1 \\ 0;-1;3|4 \\ 0;1;k+2|6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;1;-1|-1 \\ 0;-1;3|4 \\ 0;0;k+5|10 \end{pmatrix}.$$

I° caso: k = –5. La 3ª riga dà 0=10: Sistema incompatibile.

II° caso: k ≠ –5.La 3ª riga dà z=10/(k+5) e risalendo, y= (10-4k)/(k+5), x= (-5+3k)/(k+5), (sistema determinato). Ordinando: **x=(-5+3k)/(k+5), y=(10-4k)/(k+5), z=10/(k+5)**.

2°) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare 4x3 al variare del parametro reale k:

$A\underline{x} = \underline{b}$, con ${}^t\underline{x} = (x, y, z)$, ${}^t\underline{b} = (9, 1, 3, 2)$.

$$A|\underline{b} = \begin{pmatrix} 1;1;+2|9 \\ 2;1;-1|1 \\ k;-1,1|3 \\ 2;-3;k|2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;1;2|9 \\ 0,-1;-5|-17 \\ 0;-1-k:1-2k|3-9k \\ 0;-5;k-4|-16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;1;2|9 \\ 0;-1;-5|-17 \\ 0;0;3k+6|8k+20 \\ 0;0;k+21|69 \end{pmatrix}.$$

I° caso: k=-21. La 4ª riga dà 0=69: Sistema incompatibile.

II° caso: k ≠ -21. Il sistema sarà compatibile, anzi determinato, se la 3ª e la 4ª riga danno lo stesso valore di z: (8k+20)/(3k+6) = (69/(k+21), il chè intanto richiede k ≠ -1/2.

Si ricava $8k^2 - 19k + 6 = 0$, da cui k = 2, oppure k = 3/8.

Per k = 2 la soluzione è z=3, y=2, x=1; **x=1, y=2, z=3.**

per k = 3/8, z=184/57, y=49/57, x=96/57=32/19; **x=32/19, y=49/57, z=184/57.**

3°) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare 4x4 al variare del parametro reale k; risolvere poi il sistema per k = 2. $A\underline{x} = \underline{b}$, ${}^tx = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Scrivo direttamente la matrice $A|\underline{b}$ del sistema. $A|\underline{b}$ =

$$\begin{pmatrix} 1;-5;3;-3|-5 \\ 2;0;1;-1|5 \\ -5;1;3;-4|-20 \\ 3;1;-1;k|14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;-5;3,-3|-5 \\ 0;10;-5;5|15 \\ 0;-24;18;-19|-45 \\ 0;16;-10;9+k|29 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;-5;3;-3|-5 \\ 0;2;-1;1|3 \\ 0;-24;18;-19|-45 \\ 0;16;-10;9+k|29 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1;-5;3;-3|-5 \\ 0;2;-1;1|3 \\ 0;0;6;-7|-9 \\ 0;0;-2;k+1|5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1;-5;3;-3|-5 \\ 0;2;-1;1|3 \\ 0;0;6;-7|-9 \\ 0;0;0;k-4/3|2 \end{pmatrix}.$$

1° caso : k=4/3. La 4ª riga dà 0=2, dunque il sistema è incompatibile.

2° cas0 : k≠ 4/3. Il sistema è compatibile e determinato: $x_4 = 2/(k-4/3) = 6/(3k-4)$;

$x_3 = (26-9k)/2(3k-4)$; $x_2 = (9k-10)/4(3k-4)$; $x_1 = 3(13-18k)/4(3k-4)$. Riordinando:

$$x_1 = \frac{3(13k-18)}{4(3k-4)},\ x_2 = \frac{9k-10}{4(3k-4)},\ x_3 = \frac{26-9k}{2(3k-4)},\ x_4 = \frac{6}{3k-4}.$$

Per k=2 si ha $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.