Ottavio Serra
Il teorema di Rouchè – Capelli
(Elegante ma inutile).

Il teorema di Rouchè – Capelli ci dice sotto quali condizioni un sistema (lineare) è compatibile. Di solito ciò accade quando già siamo arrivati a sapere se il sistema dato è o non è compatibile, ma a quel punto il teorema è inutile per la risoluzione.

Un altro oggetto venerando usato per risolvere un sistema è la regola di Cramer: appena la matrice dei coefficienti ha più di tre righe o di tre colonne la regola comincia ad essere sempre più laboriosa da applicare. Il motivo è che, se il rango del sjstema è r, la regola richiede il calcolo di r+1 determinanti di ordine r.

Per quanto riguarda il teorema di Rouchè – Capelli, c'è da dire inoltre che la dimostrazione di solito riportata dai libri di Analisi è estremamente complessa e si dimentica appena si è superato l'esame. Così è capitato al sottoscritto. Si aggiunga che l'enunciato originale di Rouchè è difficile non solo da dimostrare, ma anche da capire e da ripetere; almeno Capelli ha avuto il merito di averne dato una formulazione semplice e facile da ricordare.

La verità è che si tratta di un teorema che trova la sua naturale collocazione in un corso di Algebra lineare in tale ambito è facile non solo da capire, ma anche da dimostrare, anche se, come detto, non serve per risolvere un sistema.

Ricordo che un sistema lineare, scritto in forma matriciale, è

[1] $$A.\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}},$$

essendo A la matrice dei coefficienti di m righe (numero delle equazioni) ed n colonne (numero delle incognite), $\underline{\mathbf{x}}$ è il vettore colonna delle incognite, $\underline{\mathbf{b}}$ il vettore colonna dei termini noti.

La matrice A può essere interpretata come la matrice, rispetto alle basi canoniche, di un'applicazione lineare α da $\boldsymbol{R}^n$ ad $\boldsymbol{R}^m$ e perciò risolvere la [1] significa trovare, se esiste, un vettore $\underline{\mathbf{x}}$ del dominio $\boldsymbol{R}^n$ che la α applica nell'assegnato vettore $\underline{\mathbf{b}}$ del codominio $\boldsymbol{R}^m$. La compatibilità (risolubilità) del sistema significa che il vettore $\underline{\mathbf{b}}$ appartiene all'immagine dell'applicazione lineare Im(α).

Siccome le colonne di A sono le immagini dei vettori di base del dominio, esse costituiscono un sistema di generatori dell'immagine Im(α); perciò, se $\underline{\mathbf{b}}$ appartiene a detta immagine, esso è combinazione lineare delle colonne di A e la sua aggiunta, come ulteriore colonna, non aumenta il rango di A: **Rango(**A**) = Rango (**A$|\underline{\mathbf{b}}$**).** In ciò consiste la dimostrazione, del teorema, nella formulazione inizialmente dovuta a Capelli.

Come è noto, il rango di una matrice è il numero massimo di (vettori) colonne linearmente indipendenti e si dimostra che è anche uguale al numero massimo di righe linearmente indipendenti. Siccome le colonne generano l'immagine dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice, il rango dà la dimensione dell'immagine. Il **Ker(**α**)** è il sottospazio del dominio $\boldsymbol{R}^n$ che α manda nel vettore $\underline{\mathbf{0}}$ dell'immagine. Perciò se $\underline{\mathbf{x}}_0$ è una soluzione particolare della [1] e $\underline{\mathbf{k}}$ è un vettore del **Ker(**α**)**, anche $\underline{\mathbf{x}}_0+\underline{\mathbf{k}}$ è soluzione della [1].

Ker(α**)** = **Ker**(A) è l'insieme soluzione del sistema omogeneo associato

[2] $$A.\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

e l'insieme soluzione del sistema [1] è $\underline{\mathbf{x}}_0$ + **Ker**(A).

Chiaramente, la soluzione del sistema [1] è unica, se **Ker**(A) = {$\underline{\mathbf{0}}$}, il chè significa che la matrice A ha rango r uguale al numero n delle colonne, cioè delle incognite componenti del vettore $\underline{\mathbf{x}}$; ciò significa anche che l'applicazione lineare α è iniettiva . Nel caso generale risulta r < n, il Ker ha dimensione n–r, e ciò significa, in termini algebrici, che n–r incognite possono assumere valori arbitrari o, come si dice, il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni. (Dim(Ker(A) = n-r).

Risoluzione di un sistema lineare.

Il metodo di risoluzione più semplice è la riduzione ***a scala*** che risale a Gauss. Esso consiste nel portare a zero i coefficienti della matrice A al di sotto degli elementi diagonali $a_{k,k}$ sommando agli elementi della j^{ma} riga (j da k+1 ad m) al di sotto della k^{ma} gli elementi della riga k^{ma} moltiplicati per $-a_{j,k} / a_{k,k}$. Gli elementi diagonali $a_{k,k}$ si chiamano pivots. Ovviamente, la stessa operazione va applicata ai termini noti.

Alla fine si ottiene l'ultima equazione (riga) con una sola incognita: x_r e, procedendo a ritroso, si ricavano le incognite $x_{r-1},\ldots, x_2, x_1$. Naturalmente, ciò accade se il sistema è compatibile.

Il rango r è dato dal numero dei pivots diversi da zero; non solo, ma se la matrice A è quadrata, il prodotto dei pivots fornisce il famoso determinante di una matrice quadrata, come sottoprodotto del procedimento di Gauss.

Che succede se, prima di aver completato la riduzione a scala, un pivot è zero? O si somma alla riga di tale pivot una riga successiva (il determinante di A, se quadrata, non cambia), o si scambia tale riga con una successiva (annotarsi in tal caso il cambiamento di segno per l'eventale determinante), o si scelgono i pivots, scendendo di riga in riga, seguendo un opportuno criterio.

Forse è meglio qualche esempio.Per altri esempi vedere nel mio sito la cartella "*ESERCIZI DI MATEMATICA*",sottocartella "ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA.

Esempio 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ -7x_1 + 7x_2 - 14x_3 + 4x_4 = k \\ 8x_1 + 9x_2 - x_3 + 27x_4 = 43 \end{cases}$$

. Si noti che il vettore termine noto **b** dipende dal parametro k, perciò il sistema sarà compatibile solo se si sceglie k in modo che **b** appartenga a Im(A).

Scriviamo la matrice del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 8 \\ -7 & 7 & -14 & 4 & k \\ 8 & 9 & -1 & 27 & 43 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & -13 & -13 \\ 0 & 21 & -21 & 39 & 49+k \\ 0 & -7 & 7 & -13 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Se k è diverso da -10, la 3^a riga dà un'uguaglianza falsa: il sistema è incompatibile.

Si noti che in tal caso Rango(A)=2, diverso dal Rango(A|**b**)=3, d'accordo col teorema di Capelli.

Se k = -10, si hanno due righe di zeri (Rango(A) = Rango(A|**b**) = 2 : due soli pivots diversi da zero, $a_{11} = 1$ e $a_{22} = -7$); si ottengono $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Posto $x_3=a$, $x_4=b$, risalendo si ricava $x_2=13/7 +a - 13b/7$, $x_1=7 -2(13 +a -13b/7) +a -5b = 23/7 -a -9b/7$. Ordinando:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{23}{7} - a - \frac{9}{7}b \\ x_2 = \frac{13}{7} + a - \frac{13}{7}b \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases}.$$

Si noti che per a=b=0 si una soluzione particolare $x_1=2/7$, $x_2=13/7$, $x_3=0$, $x_3=0$, mentre la parte contenente i parametri dà il Ker(A), una cui base si ottiene ponendo una volta a=1, b=0, un'altra a=0, b=1. Base(Ker(A))= $\{{}^t(-1, 1, 1, 0, {}^t(-9, -13, 0, 7)\}$.

Esempio 2. In questo esempio i pivots non saranno sulla diagonale, ma in ogni riga si sceglierà l'elemento di minimo valore assoluto diverso da zero per avere alla fine frazioni col denominatore più piccolo possibile. Ciò perché si lavorerà in aritmetica *esatta* (razionale, perché i dati in ingresso appartengono al campo razionale). Se i dati in igresso fossero *reali*, in ogni riga andrebbe scelto come pivot l'elemento di massimo valore assoluto, per minimizzare la propagazione degli errori. Ma per sistemi piccoli tale preoccupazione per la propagazione degli errori è fuori luogo.

$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$. Scriviamo la matrice completa dei coefficienti e dei termini noti:

2 3 4 **<u>-1</u>** | 1
3 -1 2 3 | 0 . Prendiamo come 1° pivot $a_{1,4}$ = -1 (I pivots li sottolineo):
2 -3 -5 -1| 4

2 3 4 -1 | 1   2 3 4 -1 | 1
9 8 14 0 | 3 → (scambio la 2ª riga con la 3ª divisa per 3) → 0 -2 -3 0 | 1 →
0 -6 -9 0 | 3   9 8 14 0 | 3

(come 2° pivot $a_{2,2}$ =-2)
2 3 4 **<u>-1</u>** | 1
0 **<u>-2</u>** -3 0 | 1
9 0 **<u>2</u>** 0 | 7.

Il 3° pivot può essere indifferentemente $a_{3,3}$ = 2 o $a_{3,1}$ = 9. Ma oramai la riduzione a scala (un po' a chiocciola!) è completa e, avendo tre pivots diversi da zero, segue che il rango di A, detto anche rango del sistema, è 3 e ovviamente anche il rango della matrice completa è 3: non ci sono altre righe. Il sistema è compatibile con ∞^1 soluzioni.

Posto $x_1 = \lambda$, a ritroso trovo: $x_3 = 7/2 - 9\lambda/2$, $x_2 = -23/4 + 27\lambda/4$, $x_4 = -17/4 + 17\lambda/4$. Ordinando:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \dfrac{-23}{4} + \dfrac{27}{4}\lambda \\ x_3 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}\lambda \\ x_4 = \dfrac{-17}{4} + \dfrac{17}{4}\lambda \end{cases}.$$

Esempio3. In questo esempio terremo nota dei pivots per il calcolo del determinante.

$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -20 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 14 \end{cases}$. Scrivo la matrice e preparo Det(A)=**<u>1</u>**.**<u>10</u>**. [-1].(**<u>-2</u>**).**<u>2</u>** =40

<u>1</u> -5 3 -3 | -5   1 -5 3 -3 | -5   1 -5 3 -3 | -5
2 0 1 -1 | 5 → 0 **<u>10</u>** -5 5 | 15 → 5x(0 2 -1 1 | 3) → (tralascio il 5x)
-5 1 3 -4 | -20   0 -24 18 -19 | -45   0 0 6 -7 | -9
3 1 -1 2 | 14   0 16 -10 11 | 29   0 0 -2 3 | 5

(Nel prossimo passaggio scambierò 3ª e 4ª riga, perciò nel Det(A) metto il fattore [-1]).

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{\mathbf{-2}} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & -9 \end{array} \text{ (scambio 3}^{a}\text{ e 4}^{a}\text{ riga)} \quad \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\mathbf{2}} & 6 \end{array}$$

Pertanto Det(A) = 40, Rango(A) =4, sistema determinato: $x_4=3$, $x_3=2$, $x_2=1$, $x_1=3$. Ordinando:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Note.

Eugène Rouché. Francese, 1832 – 1910. Si occupò soprattuttodo teoria delle funzioni, serie e calcolo delle probabilità.

Alfredo Capelli. Milano 1855 – Napoli 1910. Socio dell’Accademia dei Lincei e dell’Istituto Lombardo. Professore di Analisi algebrica, prima a Palermo e poi a Napoli, lasciò importanti lavori di algebra e analisi.

Pierre Sarrus. Francese, 1798 – 1861. Fu accademico di Francia per i numerosi lavori di matematica e di astronomia. Ora è noto soprattutto per la regoletta di calcolo del determinante delle matrici quadrate di ordine 3. Per matrici di ordine diverso non funziona.

Gabriel Cramer. Ginevra 1704 – Bagnols (Francia) 1752. Fece importanti studi sulle curve algebriche, sul moto e sulla forma dei pianeti, che gli valsero la nomina alla Royal Society di Londra. E’ noto purtroppo solo per la coddetta “R*egola di Cramer*”, che di solito viene applicata, senza capire perchè funziona, per risolvere sistemi lineari, ***piccoli,*** altrimenti sono dolori.