Ottavio Serra
Prodotto scalare e spazi metrici

Dato uno spazio vettoriale V su un campo ordinato K di scalari (in seguito K=***R***), si chiama prodotto scalare una funzione di VxV → ***R*** tale che:

a) per tutti i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ (proprietà commutativa);
b) per ogni a reale, $(a\,\underline{u}) \cdot \underline{v} = a(\underline{u} \cdot \underline{v})$;
c) $\underline{w} \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{w}.\underline{u} + \underline{w}.\underline{v}$ (proprietà distributiva);
d) $\underline{u}.\underline{u} = \underline{u}^2 > 0$ per ogni vettore diverso da $\underline{0}$ (prodotto scalare definito positivo).

Uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare diventa un particolare spazio **metrico**, detto **spazio euclideo**.

Prime proprietà : $\underline{0}.\underline{0} = 0$. Però il prodotto scalare può essere 0 anche per due vettori entrambi diversi da $\underline{0}$. Se $\underline{u}.\underline{v} = 0$, i due vettori si dicono ortogonali.
L'unico vettore il cui prodotto scalare con se stesso è zero è il vettore nullo; se infatti non fosse il vettore nullo, quel prodotto scalare sarebbe positivo.

Se V = $\boldsymbol{R}^n$, posto $\underline{u} = {}^t(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $\underline{v} = {}^t(y_1, y_2, \ldots y_n)$,

[1] $\underline{u}.\underline{v} = x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ è un prodotto scalare (prodotto scalare standard).

Esempio. In $\boldsymbol{R}^2$ i vettori $\underline{u} = {}^t(1, -2)$ e $v = {}^t(2,1)$ hanno prodotto scalare 0, sono ortogonali. Geometricamente, le rette di direzione $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono **perpendicolari.**

Siccome $\underline{u}^2 > 0$ (= 0, se $\underline{u} = \underline{0}$), la radice quadrata (determinazione positiva) di $\underline{u}^2$ si chiama **norma (o modulo) del vettore u** : $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u}.\underline{u}} = \sqrt{\underline{u}^2}$. In $\boldsymbol{R}^3$, se $\underline{u} = {}^t(x,y,z)$, $\|\underline{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

In $\boldsymbol{R}^n$ se $\underline{u} = {}^t(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

In $\boldsymbol{R}^n$ il sottospazio H di equazione $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = 0$ ha dimensione n-1.
Il vettore $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ è ortogonale a ogni vettore $\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots x_n)$ appartenente ad H. Infatti il prodotto scalare $\underline{a}.\underline{x} = 0$, per la definizione di H. Il vettore $\underline{a}$ si chiama vettore ***normale*** al sottospazio H.

Definizione: due sottospazi S e U di uno spazio vettoriale metrico (spazio vettoriale munito di prodotto scalare) V si dicono (mutuamente) ortogonali se ogni vettore di S è ortogonale a ciascun vettore di U (e viceversa: la relazione è simmetrica).

Esempio. In $\boldsymbol{R}^3$ munito di prodotto scalare standard, sono sottospazi ortogonali S={(t,2t,3t) ed U={^{t}(x,y,z) | x+2y+3z = 0}. Si noti che la loro intersezione è il sottospazio nullo, perciò S ed U danno $\boldsymbol{R}^3$ per somma diretta. [Dim(S)=1, Dim(U)=2].

Si noti che i sottospazi di dimensione 2 S: z=0,(piano xy) e y=0 (piano zx), pur essendo *piani perpendicolari* nel senso della geometria euclidea (hanno vettori normali ortogonali), **non** sono sottospazi ortogonali.

Teorema: Se due sottospazi sono ortogonali, il sottospazio intersezione è {$\underline{0}$} (è il sottospazio nullo). Infatti, sia $\underline{w}$ un vettore dell'intersezione; siccome $\underline{w}$ appartiene a entrambi, $\underline{w} \cdot \underline{w} = 0$, ma l'unico vettore il cui quadrato scalare è zero è il vettore nullo.

Corollario: la loro somma è diretta.

Esercizio1: In $\boldsymbol{R}^4$ è dato il sottospazio S : $x_1-3x_2-4x_4=0$. Si nota subito che Dim(S)=3. Perché non può esistere un sottospazio di dimensione 2 ortogonale ad S? Determinare il sottospazio (unico) ortogonale ad S. Esso è il sottospazio U di dimensione 1 di equazioni parametriche
$\{x_1=t,\ x_2=-3t,\ x_3=0,\ x_4=-4t\}$

Esercizio 2: In $\mathbf{R}^4$ è dato il sottospazio S di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = a+2b \\ x_2 = a-b \\ x_2 = 3a \\ x_4 = -2a+b \end{cases}$. Dim(S)=2 e una sua base è $\{u_1 = {}^t(1,1,3,-1)\ ,\ u_2 = {}^t(2,-1,0,1)\}$. Trovare (a) un sottospazio H di dim=1 ortogonale ad S e (b) il sottospazio U (unico!) di Dim=2 ortogonale ad S.

N.B. Se S non è dato in equazioni parametriche, ma cartesiane, passare ad equazioni parametriche per ottenere una base.

(a) Un sottospazio H è del tipo $\begin{cases} x_1 = c_1 t \\ x_2 = c_2 t \\ x_3 = c_3 t \\ x_4 = c_4 t \end{cases}$. Affinchè H sia ortogonale ad S occorre e basta che il vettore (c_1,c_2,c_3,c_4) sia ortogonale ai due vettori di base di S, u_1 e u_2. Si ottiene perciò il sistema indeterminato

$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 - c_4 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_4 = 0 \end{cases}$, una cui soluzione (tra le infinite a 2) è $c_4=0$, $c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=-1$.

Perciò $H = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 0 \end{cases}$. In $\mathbf{R}^4$ di sottospazi ortogonali a un sottospazio di dimensione 2 ne esistono ∞^2.

(b) Il generico vettore $\underline{u} = {}^t(x_1,x_2,x_3,x_4)$ del sottospazio U , dovendo essere ortogonale ai due vettori di base di S, porta alle seguenti equazioni cartesiane per U: $U = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Esercizio: Trovare i vettori di una base di U e verificare che essi sono ortogonali ai vettori di base di S.

U ha dim.=2 ed $\mathbf{R}^4 = S \oplus U$ (è somma diretta di S ed U).Se due sottospazi ortogonali come S ed U danno l'intero spazio come somma (necessariamente diretta, essendo ortogonali) i due sottospazi si dicono l'uno il **complemento ortogonale** dell'altro.

In generale, perciò, se lo spazio V ha dim=n e il sottospazio S di V ha dim=h, la dim del complemento ortogonale di S è n-h.