Ottavio Serra

Immagine di un sottospazio in un'applicazione lineare.

Sia T: $\boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R^m}$ un'applicazione lineare, U un sottospazio di $\boldsymbol{R^n}$. Sia S=U∩KerT e sia H un sottospazio di $\boldsymbol{R^n}$ tale che U sia somma diretta di S e di H: U=S⊕ H, da cui segue che S∩H = {$\underline{0}$}. Si avrà perciò T(U)=T(S)+T(H) = T(U∩KerT)+T(H) = {$\underline{0}$}+T(H) = T(H).
La restrizione T_H di T ad H , T_H : H → T(H), è ovviamente suriettiva; dico che risulta anche iniettiva. Infatti, per tutti gli $\underline{x}$, $\underline{x}$'∈ H, T($\underline{x}$)=T($\underline{x}$') ⇒ T($\underline{x}$-$\underline{x}$') = $\underline{0}$ ⇒ $\underline{x}$-$\underline{x}$' ∈ KerT; ma siccome è anche $\underline{x}$-$\underline{x}$' ∈ H, risulterà $\underline{x}$-$\underline{x}$' ∈ KerT∩H ⇒ $\underline{x}$-$\underline{x}$' = $\underline{0}$, cioè $\underline{x}$ = $\underline{x}$'. T_H è perciò biunivoca e Dim(T(H))=Dim(H). Siccome T(U) = T(H), Dim(T(U)) = Dim(T(H)) = Dim(H).
Se perciò Dim(H) è strettamente minore di Dim(ImT), T(U) = T(H) sarà strettamente inclusa in ImT.

Esempi.

1°. T: $\boldsymbol{R^4} \to \boldsymbol{R^3}$.

$$T=\begin{matrix}1 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\end{matrix}$$. KerT={$x_1+x_2+4x_4 = 0,\ x_2+x_3-2x_4 = 0$},

una base(KerT)=$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. ImT: x-y-z = 0.

Considero U: $x_2+x_3-2x_4 = 0$, sottospazio di $\boldsymbol{R^4}$. Una sua base è $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, da cui si vede che U include KerT, S=KerT, H=$\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. Perciò T(U) = T(H) = T$\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ = $\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

U ha dim=3, a priori Dim(T(U))≤2 = Dim(ImT), tuttavia, siccome KerT, di Dim=2, è strettamente incluso in U, S=KerT ha Dim=2, Dim(H) = 1 e Dim(T(U)) = 1.

2°. Stessa T. Considero il sottospazio U di $\boldsymbol{R^4}$ di dimensione 3, U: $x_1+x_2 = 0$.

Una base di U è {u_1,u_2,u_3}= $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Risulta: $T(\underline{u}_1)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, T(\underline{u}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, T(\underline{u}_3)=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$.

Siccome i primi due sono lin.dip. (e si capisce: la loro somma è $\underline{\mathbf{0}}$ perché le loro controimmagini sono nel Ker), H ha Dim=2 come T(H), T(U) =T(H) ha Dim=2 e coincide con ImT.

3°. Stessa T. Considero il sottospazio U di $\boldsymbol{R^4}$ di dimensione 2, U: {$x_1+2x_3=0,\ x_1+x_2-x_4=0$}.
Una base di U è

$\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Si verifichi che U∩KerT = {$\underline{\mathbf{0}}$}, perciò U=H e T(U)=ImT.

4°. Stessa T. Sia U il sottospazio di $\boldsymbol{R}^4$ di dimensione 2, U: $\{5x_1-x_2-4x_4=0,\ x_2+x_3-2x_4=0\}$.

Una sua base è $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\6\\1\end{pmatrix}\right\}$. Determino S=U∩KerT. Risulta $S=\left\{\beta\begin{pmatrix}0\\-4\\6\\1\end{pmatrix}\right\}$ e perciò T(U) ha

dimensione 1: $T(U)=T(H)=T\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.