Ottavio Serra

Esercizio di geometria

Dato il punto P(1,3,4) e le rette r: x+y-2z-2 = 2x+y-6=0 ed
s: x+y+z-4 = x+2y-z-1=0,

a) verificare che le rette r ed s sono sghembe;
b) determinare le equazioni parametriche di r ed s, nonché i loro vettori direttori;
c) determinare la retta t passante per P e incidente le rette r ed s;
d) determinare la retta p perpendicolare e incidente sia r sia s;
e) determinare il piano π contenente r e parallelo ad s;
f) calcolare la distanza tra le rette r ed s;
g) determinare, se possibile, il piano contenente la retta r e perpendicolare ad s e, se non è possibile, spiegare perché.

a) Sistema tra le equazioni di r ed s:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 \end{matrix}$$

Dopo la riduzione a scala, si vede che la 4^a riga implica una contraddizione o, se vogliamo, il Rango(A)=3, mentre il Rango(A^c)=4: per il teorema di Rouchè Capelli il sistema è incompatibile: le rette non sono incidenti.
Perciò le rette o sono parallele (e distinte) o sono sghembe.

b) r: x=4-2a, y=-2+4a, z=a; ***r*** = (-2,4,1);
s: x=7-3b, y=-3+2b, z=b; ***s*** = (-3,2,1). I vettori direttori sono non proporzionali, le rette non sono parallele, dunque sono sghembe.

c) Detto R il punto generico di r, il vettore ***PR*** = (3-2a, -5+4a, a-4) e la retta PR ha equazioni parametriche x=1+(3-2a)λ, y=3+(-5+4a)λ, z=4+(a-4)λ.
Imponendo che l'intersezione tra le rette PR ed s non sia vuota, sostituendo le equazioni parametriche di PR nelle equazioni cartesiane di s, si ottiene:
4+(3a-6)λ = 0, 2+(5a-3)λ = 0. Da queste si ricava: a=0 e λ=2/3.
Perciò il vettore ***PR*** = (3,-5,-4) e la retta PR = t è {x=1+3λ, y=3-5λ, z=4-4λ}.

d) Detto R il punto generico di r, S il punto generico di s, dalle equazioni parametriche si ha: R(4-2a, -2+4a, a); S(7-3b, -3+2b,b). Segue che il vettore ***RS*** = (3-3b+2a, -1+2b-4a, b-a). Imponiamo che ***RS*** sia ortogonale ai vettori ***r*** ed ***s***.
Si ottiene un sistema in a e b che, risolto, dà a=25/69, b=81/69. Perciò il vettore ***RS*** =(3-243/69+50/69, -1+162/69-100/69, 56/69) = (14/69, -7/69, 56/69).
Il punto R(226/69, -38/69, 25/69), il punto S(240/69, -45/69, 81/69).
La retta p richiesta è la retta RS, un cui vettore direttore, proporzionale ad ***RS***, è ***p***=(2,-1,8). Le equazioni parametriche di p sono:
x=226/69+2λ, y=-38/69-λ, z=25/69+8λ.

e) Il pianp π richiesto appartiene al fascio di piani di asse r:
a(x+y-2z-2)+b(2x+y-6)=0 → ((a+2b)x+(a+b)y-2az-2a-6b=0.
π si determina imponendo la condizione di parallelismo: ***s*** = (-3,2,1) deve appar-

tenere al sottospazio direttore di π: -3(a+2b)+2(a+b)-2a=0 → -3a=4b, a=-4, b=3.
π : 2x-y+8z-10=0.

f) La distanza tra le rette r ed s si può calcolare in due modi.
1° distanza tra un qualunque punto di s, per esempio (7,-3,0), e il piano π determinato nel punto e):

$$d(r,s) = d(S_0,\pi) = \frac{|2*7-1*(-3)+8*0-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+8^2}} = \frac{7}{\sqrt{69}}$$

2° norma del vettore ***RS*** calcolato al punto d):

$$d(r,s) = \|RS\| = \sqrt{\left(\frac{14}{69}\right)^2+\left(\frac{-7}{69}\right)^2+\left(\frac{56}{69}\right)^2} = \sqrt{\frac{7^2(4+1+64)}{69^2}} = \frac{7}{\sqrt{69}}$$

g) Affichè nel fascio di piani di asse r ce ne sia uno perpendicolare ad s occorre che il vettore direttore ***s*** = (-3,2,1) di s sia ortogonale al piano da determinare e quindi a ogni retta retta di questo piano, in particolare ad r, il cui vettore direttore è ***r*** = (-2,4,1). Ma il prodotto scalare ***r.s*** =6+8+1 = 15 diverso da zero.
Perciò il piano richiesto non esiste.