Ottavio Serra
Matrici e determinanti.

In questa nota estenderemo a matrici quadrate di ordine n qualsiasi il concetto di determinante introdotto nelle scuole secondarie per matrici di ordine 2 come tecnica di calcolo per sistemi lineari di due equazioni in due incognite (Metodo di Cramer, che non useremo <u>MAI</u> per sistemi più grandi).
Le proprietà osservate per i determinanti 2x2 saranno assunte come assiomi per il determinante di una matrice nxn. Gli assiomi saranno volutamente ridondanti per velocizzare il calcolo di un determinate.
<u>In seguito il determinante sarà usato solo per calcolare gli autovalori di un operatore lineare.</u>

1. Data una matrice $A=(a_{i,k})$, con elementi in ***R,*** non necessariamente quadrata, il rango è il numero delle colonne (dei vettori colonna) linearmente indipendenti (liberi). Dopo la riduzione a scala, si trova che il **rango** è uguale al numero degli elementi ***diagonali*** $a_{k,k}$ (pivots) **diversi da zero**. Non necessariamente i pivots sono sulla diagonale, però è sempre possibile portarli sulla diagonale mediante opportuno riordino delle colonne.

Si ricordi che la matrice trasposta $A^t=(a_{k,i})$, cioè che scambia le righe con le colonne, ha lo stesso rango di A. Perciò il rango è anche uguale al numero delle righe (dei vettori riga) linearmente indipendenti.

Una matrice quadrata si dice triangolare (superiore) se tutti gli elementi al di sotto della diagonale sono nulli. Si dice diagonale se tutti gli elementi fuori della diagonale $\{a_{i,i}\}$ sono nulli. Si dice simmetrica se $a_{i,k} = a_{k,i}$ (Elementi simmetrici rispetto alla diagonale sono uguali). Si dice antisimmetrica se $a_{i,k} = -a_{k,i}$. Come sono gli elementi diagonali $a_{i,i}$?

Per le matrici quadrate di *ordine n*, $A=(a_{i,k})$ con i da 1 ad n e k da 1 ad n (numero di righe uguale al numero di colonne = n) si definisce una funzione dall'insieme ***M***(n,n) delle matrici di ordine n sul campo ***R*** , detta determinante, Det**:** ***M***(n,n) → ***R***, che passo a definire in modo induttivo su n.

(Il determinante di una matrice (quadrata) di ordine n si chiama anche determinante di ordine n).

a) Se A è di ordine 1, cioè ha un solo elemento $a_{1,1}$, $Det(A)=a_{1,1}$.

Se A ha ordine n >1, si chiama minore complementare di $a_{i,k}$ (e lo indico con $m_{i,k}$) la matrice di ordine n-1 che si ottiene da A togliendo la riga i e la colonna k. Chiamerò cofattore, o complemento algebrico, di $a_{i,k}$ il numero $c_{i,k} = (-1)^{i+k}.Det(m_{i,k})$.

b) (**Teorema di Laplace**) Il Det(A) è definito come la somma dei prodotti degli elementi di una riga per i rispettivi Esempio. Sia $A=\begin{pmatrix}3,5\\4,8\end{pmatrix}$ $Det(A)=3.(-1)^{1+1}.8 + 5.(-1)^{1+2}.4 = 3.8 - 5.4 = 4$.

Il teorema di Laplace (qui assunto come assioma) riduce il calcolo di un determinante di ordine n al calcolo di determinanti di ordine inferiore.

Si noti che la matrice trasposta $A^t=\begin{pmatrix}3,4\\5,8\end{pmatrix}$ ha lo stesso determinante. Questa proprietà è generale; perciò Det(A) si può calcolare moltiplicando gli elementi di una colonna per i rispettivi cofattori.

Oserviamo che sommando a una riga un'altra riga, in generale una combinazione lineare di altre righe, il determinante **non** cambia. Da $A=\begin{pmatrix}3,5\\4,8\end{pmatrix}$ ottengo, sottraendo dalla prima riga la seconda, $\begin{pmatrix}-1,-3\\4,8\end{pmatrix}$ il cui determinante è ancora -8+12 = 4.

In tal modo è sempre possibile che $a_{1,1}$, se non è zero, assuma il valore 1 o -1.

c) Scambiando due righe (o due colonne) il determinante cambia segno. Provare con A.

d) un fattore comune agli elementi di una riga o di una colonna può essere messo in evidenza. Es: $A=\begin{pmatrix}3,5\\4,8\end{pmatrix}$ = 4.$\begin{pmatrix}3,5\\1,2\end{pmatrix}$ = 4.(6-5) =4. Perciò se due righe (o colonne) sono proporzionali, il Det è zero.

Tutte queste proprietà si estendono ai determinanti di ordine >2.

e) Una volta ridotto la matrice A a forma triangolare (a scala) per applicazione ripetuta del teorema di Laplace, risulta che il **Det(A) è uguale al prodotto degli elementi diagonali** (dei pivots). In particolare, se qualche pivots è zero, anche il determinante è zero. Ma se qualche pivots è zero, il rango è minore di n, perciò **condizione necessaria e sufficiente affinchè il rango sia massimo** (uguale all'ordine n) è che **Det(A) sia diverso da zero**.

NOTA: si possono scegliere per convenienza di calcolo i pivots fuori della diagonale; in tal caso occorre tener conto degli eventuali scambi di righe o di colonne per il segno del determinante.

Esempio 1

$$Det(A)=Det\begin{pmatrix}1,2,3\\5,2,4\\2,6,7\end{pmatrix}=Det\begin{pmatrix}1,2,3\\0,-8.-11\\0,2,1\end{pmatrix}=-Det\begin{pmatrix}1,2,3\\0,2,1\\0,-8,-11\end{pmatrix}\to -Det\begin{pmatrix}1,2,3\\0,2,1\\0,0,-7\end{pmatrix}$$

e perciò Det(A) = -(-14) = 14.

Non sempre è necessario o conveniente ridurre la matrice a forma triangolare o addirittura diagonale. Basta qualche applicazione del teorema di Laplace.

Esempio 2

$$Det(A)=\det\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,1,3\\3,-1,1,1\\4,2,-1,-2\end{pmatrix}=Det\begin{pmatrix}1,2,3,4\\0,0,-2,-1\\0,-7,-8,-11\\0,-6,-13,-18\end{pmatrix}=Det\begin{pmatrix}0,-2,-1\\-7,-8,-11\\-6,-13,-18\end{pmatrix}$$

(Ho applicato il Teorema di Laplace alla 1^a colonna). Scambiando ora 1^a e 3^a colonna ho:

$$Det(A)=-Det\begin{pmatrix}-1,-2,0\\-11,-8,-7\\-18,-13,-6\end{pmatrix}=-Det\begin{pmatrix}-1,-2,0\\0,14,-7\\0,23,-6\end{pmatrix}=-(-1).7.Det\begin{pmatrix}2,-1\\23,-6\end{pmatrix}=7.(-12+23)=77.$$

(ho poi messo in evidenza il fattore 7 nella 2^a riga).

Esempio 3

$$Det(A)=Det\begin{pmatrix}3,5,7,9\\5,4,2,3\\4,4,7,8\\3,2,9,6\end{pmatrix}=\frac{1}{2}Det\begin{pmatrix}1,6,12,15\\5,4,2,3\\4,4,7,8\\3,2,9,6\end{pmatrix}$$

(Ho sostituito la 1^a riga con il suo **doppio** meno la 2^a riga. Perciò ho dovuto dividere per **2)**

Continuando**:**

$$Det(A)=\frac{1}{2}Det\begin{pmatrix}1,6,12,15\\5,4,2,3\\4,4,7,8\\3,2,9,6\end{pmatrix}=\frac{1}{2}Det\begin{pmatrix}1,6,12,15\\0,-26,-58,-72\\0,-20,-41,-52\\0,-16,-27,-39\end{pmatrix}=\frac{1}{2}2Det\begin{pmatrix}-13,-29,-36\\-20,-41,-52\\-16,-27,-39\end{pmatrix}.$$

(Per avere numeri più piccoli sottraggo dalla 1^a riga la 2^a e dalla 2^a la 3^a:

$$Det(A) = Det\begin{pmatrix} 7,12,16 \\ -4,-14,-13 \\ -16,-27,-39 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} 7,12,16 \\ -4,-14,-13 \\ 0,29,13 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} 3,-2,3 \\ -4,-14,-13 \\ 0,29,13 \end{pmatrix}$$

(Ho sommato alla 1^a riga la 2^a). Infine, sommando ancora la 2^a alla 1^a ,ho

$$Det(A) = Det\begin{pmatrix} -1,-16,-10 \\ -4,-14,-13 \\ 0,29,13 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} -1,-16,-10 \\ 0,50,27 \\ 0,29,13 \end{pmatrix} = -1.Det\begin{pmatrix} 50,27 \\ 29,13 \end{pmatrix} = 29.27-50.13=133.$$

Esempio 4 verificare che la matrice A_{5x5}

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{matrix}$$

ha determinane = 1. Anche i suoi minori principali di ordine inferiore hanno determinante = 1.
Si chiamano minori principali di A quelli che hanno la diagonale sulla diagonale di A.
Per esempio. La matrice

$$B_{3x3} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{matrix}$$ è un minore principale di A.

2. Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici.

Sappiamo che un'applicazione lineare $\alpha : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ è rappresentata, rispetto alle basi canoniche dei due spazi, da una matrice A di m righe ed n colonne. Le colonne sono i vettori immagine dei vettori di base del dominio $\boldsymbol{R}^n$**.** Se β è un'applic. Lineare di $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^p$ con matrice B**,** α e β si possono comporre in $\gamma = \beta \circ \alpha : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^p$**.** La matrice di γ sarà la matrice $C_{p,n} = B_{p,m} \,.\, A_{m,n}$ *e il prodotto* di matrici va fatto *righe x colonne.* Si noti che non ha senso fare il prodotto commutando le matrici, ammenocchè non sia p = n. In tal caso il prodotto B.A sarà una matrice (n,n) e A.B una matrice (m,m), il chè ci fa capire che non vale la proprietà commutativa. Il problema della commutatività si pone nel caso che si compongano matrici quadrate di ordine n (Endomorfismi di $\boldsymbol{R}^n$**)** , ma vedremo che la proprietà commutativa in generale non vale.

Esempio. $\alpha(x, y) = (x+y, 2x-y, x)$; la sua matrice è $A=\begin{pmatrix} 1,1 \\ 2,-1 \\ 1,0 \end{pmatrix}$.

$\beta(x, y, z) = (2x+y-z, x+2y+3z)$; la sua matrice è $B=\begin{pmatrix} 2,1,-1 \\ 1,2,3 \end{pmatrix}$.

$\beta\circ\alpha$ (x, y) = β(x+y, 2x-y, x) = (2x+2y +2x-y –x, x+y +4x-2y +3x) = (3x+y, 8x-y) e la matrice di $\beta\circ\alpha$ è $BA = \begin{pmatrix} 2,1,-1 \\ 1,2,3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1,1 \\ 2,-1 \\ 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 8,-1 \end{pmatrix}$, come si verifica facilmente.

Esercizio. Calcolare $\alpha\circ\beta$ e verificare che la sua matrice è A.B (che risulta di ordine 3).
Vediamo ora che matrici di ordine n non commutano (in generale).

Esempio 5: $A=\begin{pmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,1 \end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix} 10,7 \\ 22,19 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 17,24 \\ 7,12 \end{pmatrix}$.

Esempio 6: Verificare che invece le matrici A=$\begin{pmatrix} 2,2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ e B=$\begin{pmatrix} -2,8 \\ -4,10 \end{pmatrix}$ commutano e il loro prodotto è $\begin{pmatrix} -12,36 \\ -18,42 \end{pmatrix}$.

Considero l'insieme M delle matrici quadrate di ordine n. Rispetto alla somma di matrici e al prodotto di uno scalare per una matrice: $(A+B)_{i,k} = (A_{i,k}+B_{i,k})$ e $\lambda.(A_{i,k}) = (\lambda.A_{i,k})$ M è uno spazio vettoriale di dimensione n^2 . La sua base canonica è l'insieme di matrici che hanno 1 in un posto e 0 (zero) altrove.

3. L'anello delle matrici quadrate di ordine n.

Se si considera anche l'operazione di prodotto, M acquista la struttura di anello, come l'anello degli interi, ma con significative differenze.

1° : Non vale la proprietà commutativa della moltiplicazione (M è un anello non commutativo);

2° : Non vale la legge di annullamento del prodotto: esistono matrici non nulle il cui prodotto è la matrice ***O*** (matrice nulla, che ha 0 in ogni posto: $a_{i,k} = 0$).

Esempio in $M_{2,2}$. A=$\begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

La matrice unità è la matrice identica I, che ha 1 sulla diagonale e 0 altrove.

4. Matrici invertibili.

Una matrice quadrata A di ordine n rappresenta un endomorfismo di $\boldsymbol{R}^{\mathbf{n}}$. Se rango(A) = n, equivalente a dire che Det(A) è diverso da 0, l'endomorfismo è invertibile e sarà rappresentato da una matrice B detta inversa di A, B=A^{-1}, tale che $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

Siccome le colonne di A, immagini dei vettori della base canonica di $\boldsymbol{R}^{\mathbf{n}}$, costituiscono una nuova base di $\boldsymbol{R}^{\mathbf{n}}$ (le colonne di A sono linearmente indipendenti, se il rango è n), A^{-1} applica la nuova base nella base canonica e perciò le colonne $\underline{\mathbf{c}}_k$ di A^{-1} si calcolano risolvendo gli n sistemi lineari
$A\underline{\mathbf{c}}_k = \underline{\mathbf{e}}_k$, essendo $\underline{\mathbf{e}}_k$ il k° vettore della base canonica.

Siccome i vettori della base canonica sono le colonne della matrice I,, lo schema di calcolo di A^{-1} è il seguente A | I → I | A^{-1}. Si esegue una riduzione di Gauss fino a trasformare A in I: a destra, avremo A^{-1}.

Esempio 6.

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c}{A} & \multicolumn{2}{c}{I} \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c}{I} & \multicolumn{2}{c}{A^{-1}} \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}.$$

Si noti che se Det(A) = c (diverso da zero), Det(A^{-1}) = 1/c. Ciò è vero in generale.

Vale anche in generale che, pur potendo essere A.B diverso da B.A , Det(A.B) = Det(B.A). Verificarlo su qualche esempio, per esempio sulle matrici dell'**esempio 5**.

5. Cambiamento di base.

Un vettore $\underline{\mathbf{v}}$ di $\boldsymbol{R}^n$ è rappresentato, rispetto alla base canonica I, da un vettore colonna numerico $\underline{\mathbf{x}}$ tale che $\underline{\mathbf{v}} = I.\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}$. Se P è la matrice le cui colonne rappresentano una nuova base di $\boldsymbol{R}^n$**,** risulterà $\underline{\mathbf{v}} = I.\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} = P\underline{\mathbf{z}}$, essendo $\underline{\mathbf{z}}$ il vettore numerico che rappresenta $\underline{\mathbf{v}}$ nella nuova base P. Segue che $\underline{\mathbf{z}} = P^{-1}.\underline{\mathbf{x}}$.

Esempio 7. Sia P=$\begin{pmatrix} 3,2 \\ 4,3 \end{pmatrix}$ una nuova base di $\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$. P^{-1}=$\begin{pmatrix} 3,-2 \\ -4,3 \end{pmatrix}$ (procedere come nell'esempio 6).

Se $\underline{\mathbf{v}} = I\underline{\mathbf{x}} = {}^t(1, 5)$, si avrà $\underline{\mathbf{z}} = P^{-1}\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3,-2 \\ -4,3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$. Verifica: $P.\underline{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 4,3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Sia ora α: $\boldsymbol{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \boldsymbol{R}^{\mathbf{m}}$ e sia A la matrice che rappresenta α rispetto alle basi canoniche. Sia $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}'$.

Se assumo P come nuova base in $\boldsymbol{R}^{\mathbf{n}}$ e Q come nuova base in $\boldsymbol{R}^{\mathbf{m}}$ **,** avrò $AP\underline{\mathbf{z}} = Q\underline{\mathbf{z}}'$, da cui $(Q^{-1}AP)\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{z}}'$. In particolare, se m=n α è un endomorfismo; se poi Q=P, sarà $(P^{-1}AP)\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{z}}'$.

La matrice B=($P^{-1}AP$) rappresenta l'endomorfismo α di $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ nella nuova base P.

Esempio 8. Sia dato l'endomorfismo α di $\boldsymbol{R}^2$ rappresentato dalla matrice A=$\begin{pmatrix} -11, 12 \\ -24, 23 \end{pmatrix}$. Si assuma come nuova base la matrice P=$\begin{pmatrix} 3, 2 \\ 4, 3 \end{pmatrix}$ dell'esempio 7. Rispetto a P α sarà rappresentato da

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3, -2 \\ -4, 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11, 12 \\ -24, 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3, 2 \\ 4, 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15, -10 \\ -28, 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3, 2 \\ 4, 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, 0 \\ 0, 7 \end{pmatrix}.$$

(**N.B.** La scelta della nuova base P non è stata casuale: volevo ottenere una rappresentazione diagonale di α. Vedi nella stessa cartella autovettori e autovalori).