Ottavio Serra
Autovettori e autovalori di un endomorfismo di $\boldsymbol{R}^n$

Dato un endomorfismo α $\boldsymbol{R}^n$ e A la matrice (di ordine n) che lo rappresenta rispetto alla base canonica, si chiama ***autovettore*** di α (di A) un vettore $\underline{\mathbf{v}}$ diverso dal vettore nullo $\underline{\mathbf{0}}$ tale che

[1] $\alpha(\underline{\mathbf{v}}) = A.\underline{\mathbf{v}} = \lambda\,\underline{\mathbf{v}}$.

Se l'uguagliana [1] sussiste, λ si chiama ***autovalore*** di A e $\underline{\mathbf{v}}$ autovettore relativo a λ.

Dalla [1] segue, essendo I la matrice identica di $\boldsymbol{R}^n$: $A.\underline{\mathbf{v}} = \lambda\, I\underline{\mathbf{v}}$, cioè

[2] $(A-\lambda I)\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$.

La [2] rappresenta, in forma matriciale, un sistema lineare e omogeneo di n equazioni in n incognite (le componenti dell'autovettore $\underline{\mathbf{v}}$) e affinchè ci sia una soluzione non nulla occorre che la matrice A–λI abbia rango minore di n, il chè implica che il suo determinante sia zero:

[3] $\mathrm{Det}(A-\lambda I) = 0$ è perciò l'equazione, di grado n, le cui soluzioni sono gli autovalori di A.

Si ricordi che nel campo reale non sempre l'equazione [3] ha soluzioni reali.

La [3] è detta equazione ***caratteristica*** dell'endomorfismo A. Noi ci limitiamo ad autovalori reali.

Una volta trovatoun autovalore, lo si sostituisce nel sistema [2] e si trovano gli (infiniti) autovettori associati a quell'autovalore. Se, infatti, $\underline{\mathbf{v}}$ è un autovettore, anche c. $\underline{\mathbf{v}}$ lo è

$$[\, c.(A\,\underline{\mathbf{v}}) = c.(\lambda\,\underline{\mathbf{v}}) \rightarrow A(c\underline{\mathbf{v}}) = \lambda(c.\underline{\mathbf{v}})\,]$$

e se $\underline{\mathbf{v}}$ e $\underline{\mathbf{w}}$ sono autovettori relativi a quell'autovalore, anche $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}$ **lo è**

$$[A\,\underline{\mathbf{v}} + A\underline{\mathbf{w}} = \lambda\,\underline{\mathbf{v}} + \lambda\underline{\mathbf{w}} \rightarrow A(\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = \lambda.(\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}).$$

Se, perciò, all'insieme di tutti gli autovettori relativi all'autovalore λ aggiungiamo il vettore nullo, si ottiene un sottospazio di $\boldsymbol{R}^n$, detto ***autospazio*** relativo (o associato) all'autovalore λ.

La dimensione di tale autospazione si chiama molteplicità geometrica di λ.

Un fondamentale teorema afferma che se per ogni autovalore di A la molteplicità geometrica è uguale alla molteplicità algebrica, A è ***diagonalizzabile***, cioè l'endomorfismo rappresentato da A è rappresentabile con una matrice diagonale D che ha gli autovalori, contati con la dovuta molteplicità algebrica, sulla diagonale e zero altrove. Ciò è possibile perché, nelle ipotesi poste, esistono n autovettori linearmente indipendenti, che quindi si possono assumere come base dello spazio. Detta P la matrice che ha per colonne i suddetti autovettori, P è un endomorfismo che applica la base canonica nella base di autovettori, P^{-1} applica la base di autovettori nella base canonica; ma se una matrice è diagonale, i suoi autovettori sono i vettori della base canonica, perciò

[4] $PDP^{-1} = A$, equivalente a $P^{-1}AP = D$, oppure ancora $AP = PD$.

P è la matrice del cambiamento di base che diagonalizza A: ***matrice diagonalizzante***.

1° Esercizio. (a) Perché P è invertibile? (b) Verificare che la [4] è equivalente a AP = PD.

Dimostro ora che **autovettori associati** ad **autovalori distinti** sono **linearmente indipendenti**. Siano λ e μ autovalori di A, $\underline{\mathbf{u}}$ e $\underline{\mathbf{v}}$ loro autovalori. Se $\underline{\mathbf{v}}$ dipendesse linearmente da $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} = c.\underline{\mathbf{u}}$, con c diverso da zero perchè $\underline{\mathbf{v}}$ è un autovettore, avremmo $A\underline{\mathbf{u}} = \lambda\underline{\mathbf{u}}$ e $A(c\underline{\mathbf{u}}) = \mu c\underline{\mathbf{u}}$, da cui $A\underline{\mathbf{u}} = \mu\underline{\mathbf{u}}$ e perciò $\underline{\mathbf{0}} = (\lambda-\mu)\underline{\mathbf{u}}$, da cui segue $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$, contro l'iptesi che gli autovalori siano distinti.

Perciò, se si hanno n autovalori (reali) distinti, necessariamente di molteplicità algebrica 1, si avranno n autevettori liberi (linearmente indipendenti) e quindi una base di autovettori.

Se invece si ha, poniamo, un autovalore di m.a. 2, la diagonalizzabilità di A è possibile solo se il relativo autospazio ha dimensione 2, in modo che a quell'autovalore si possano associare due autovettori linearmente indipendenti, Se la dimensione è 1, in generale: se la molteplicità geometrica di un autovalore è minore di quella algebrica, A non sarà diagonalizzabile.

Mostrerò alcuni esempi di endomorfisni di $\boldsymbol{R}^2$ e di $\boldsymbol{R}^3$, volutamente semplici, al fine di illustrare le cose dette.

Es.1 $A = \begin{pmatrix} +1, -1 \\ +2, +4 \end{pmatrix}$. Gli autovalori sono 2 e 3 , ovviamente entrambi di m.a. = 1. Perciò A è diagonalizzabile. Gli autospazi sono $U_2 = U_{(\lambda=2)} = \{{}^t(1, -1)\}$ e $U_3 = U_{(\lambda=3)} = \{{}^t(1,-2)\}$, la matrice diagonale è

$D = \begin{pmatrix} 2,0 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ e la matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} +1,+1 \\ -1,-2 \end{pmatrix}$. N.B. Le colonne di P sono gli autovettori, in generale i vettori di base degli autospazi, nell'ordine in cui si susseguono in D gli autovalori.
Perciò, se prendo come matrice diagonale $D' = \begin{pmatrix} 3,0 \\ 0,2 \end{pmatrix}$, la diagonalizzante sarà $P' = \begin{pmatrix} +1,+1 \\ -2,-1 \end{pmatrix}$.
Verificare che AP = PD.

Es.2 $A = \begin{pmatrix} 3,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ C'è solo l'autovalore 3 con m.a. = 2. Però l'autospazio $U_3 = \{a.{}^t(1,0)\}$ ha dimensione 1 e di conseguenza A **non è** diagonalizzabile.

Es.3 $A = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 1,3 \end{pmatrix}$**.** Verificare che gli autvalori sono 2 e 4 e autovettori associati sono ${}^t(1, -1)$ e ${}^t(1, 1)$.
Si noti che A è simmetrica e che gli autovettori sono ortogonali.
Questa è una proprietà generale : una matrice simmetrica ha sempre autovalori reali, è sempre diagonalizzabile e autovettori relativi ad autovalori distinti sono **ortogonali.**

Es.4 Considero ora una matrice di ordine 3:

$A = \begin{pmatrix} 4,1,-1 \\ 0,3,0 \\ 2,2,1 \end{pmatrix}$. L'equazione caratteristica è $\begin{vmatrix} 4-\lambda,1,-1 \\ 0,3-\lambda,0 \\ 2,2,1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Applicando il T. di Laplace alla 2ª riga, si ottiene $(3-\lambda).\begin{vmatrix} 4-\lambda,-1 \\ 2,1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3-\lambda)[4-5\lambda+\lambda^2+2] = 0 \rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)^2 = 0$, e gli autovalori sono $\lambda=2$ con m.a.=1 e $\lambda=3$ con m.a.=2.
Calcolo prima l'autospazio U_3 relativo all'autovalore 3.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

, L'equazione di U_3 è quindi x+y-z=0 con dim. =2, posso perciò già dire che A è diagonalizzabile. Una base di U_3 è $\{{}^t(1, 0, 1), {}^t(1, -1, 0)\}$.
Calcolo ora U_2 che sarà necessariamente di dim. =1.

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

L'equazione di U_2 è {y = 0, 2x-z = 0}, e un vettore di base è ${}^t(1, 0, 2)$. A si diagonalizza in

$D = \begin{pmatrix} 2,0,0 \\ 0,3,0 \\ 0,0,3 \end{pmatrix}$ e la diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 1,1,1 \\ 0,0,-1 \\ 2,1,0 \end{pmatrix}$.

2° Esercizio. Se A è già diagonale , $A = \begin{pmatrix} a,0,0 \\ 0,b,0 \\ 0,0,c \end{pmatrix}$, chi sono gli autovalori? Chi sono gli autospazi?

Gli autospazi trovati cambiano se a, b, c in tutto o in parte sono uguali?