

INTRODUZIONE AL POTERE RISOLUTIVO

RIASSUNTO. Viene trattato il metodo classico di definizione teorica del potere risolutivo con particolare riguardo agli obiettivi dei telescopii. al quale l'Autore vi congiunge alcune personali proposte didattiche ed osservazioni di carattere generale.



Pierre Dubochet

Marseille (France) 21 Agosto 2005

Indice

1.0 Inquadramento della questione

2.0 Le conseguenze del calcolo

3.0 Diventar grandi con senno

4.0 Conclusione aperta...

“...so ben questo, che il voler contrastar di una cosa, senza haverla mai veduta, con chi l’ha osservata mille volte, par che abbia un poco dell’arditetto. Et quanto a Saturno, V. S. lo potrà cominciar a veder comodamente: et havendo occhiale esquisito, vedrà che sono 3 stelle poste così oOo; et tra di loro immutabili.”

Galileo Galilei

(da: lettera a Gallanzone Gallanzoni)

1.0 Inquadramento della questione

Con l'espressione "potere risolutivo (d'ora in poi: p.r.)" o "potere separatore di un obiettivo" s'intende sia la sua capacità e sia l'effetto che ne consegue nel separare le immagini di due punti P_1 e P_2 formatesi sul suo piano focale e quanto più prossimi all'asse ottico.

Ricordo che l'espressione "potere risolutivo" non è del tutto corretta, in Fisica, per indicare il fenomeno in discorso anche se, a tutt'oggi, non si è ancora trovato una terminologia sostitutiva. Noto pure come taluni Autori, anche di eccellente nome accademico, perdurino nell'usare il termine "difetti" (in inglese: *defects*) trattando delle aberrazioni delle lenti mentre sono *proprietà*, sia pur negative. Il difetto è propriamente qualcosa che si riferisce ad un errore di lavorazione, ad una mancanza della dovuta accuratezza durante il processo che conduce alla costruzione fisica, materiale di una lente: le aberrazioni restano analiticamente individuate, i difetti no.

Osserviamo la fig. 1. Dai punti P_1 e P_2 esce, irradiandosi attorno ad essi, un fascio di raggi luminosi (¹) di cui solo una parte attraversa la lente di apertura efficace D , con $D = 2 R$, i quali convergono nel piano focale posto in $P'_1 P'_2$ dando luogo alla vera immagine di *diffrazione* (detta anche *disegno*, *macchia* – in inglese: *pattern* – ovvero *disco spurio di Airy*) dei punti a sinistra della lente. Il rettangolo tratteggiato racchiude circa l'87% della diffrazione. Essa, di fatto, è la reale immagine dei punti, in contrasto con l'ottica gaussiana, sulla quale Rayleigh, studiandola, ne concluse che un sistema ottico può ancora separare due sorgenti puntiformi egualmente luminose se il massimo della macchia di una sorgente coincide con il primo minimo dell'altra. Ovviamente l'immagine che si forma in $P'_2 P'_1$ per essere vista come tale va opportunamente ingrandita con un microscopio semplice, comunemente detto oculare. Sempre Rayleigh si rese conto che non era possibile ingrandire *ad libitum* l'immagine conservando il medesimo diametro nella lente obiettiva e, anche volendo intervenire sulla sola esclusiva lunghezza focale, la macchia si faceva sì più grande, (e meno luminosa) ma i particolari erano sempre gli stessi, la separazione non migliorava.

Infatti, che ne sarebbe stato se i punti lontani si fossero trovati reciprocamente più vicini ovvero, il che equivale, se la distanza z' fosse stata minore di quella in esame? L'ottica gaussiana

¹ traducibile in inglese con *emerging pencils*.

avrebbe risposto che la separazione sarebbe stata possibile fino a valori infinitamente piccoli di z' , ma le cose non funzionano in questo modo.

I motivi del disaccordo sono essenzialmente dovuti al fatto che la luce *non* si propaga in linea retta e quindi la sezione di un “raggio” del fascio *non* può nemmeno essere un punto. La luce è un fenomeno ondulatorio con un fronte d’onda canonicamente sferico e ritengo che le consuete esperienze scolastiche di uno spigolo vivo (ago, lametta...) visto in intensa luce puntiforme e la scomposizione cromatica col prisma, devono fugare ogni incertezza.

Se però le cause si fermassero qui l’Allievo potrebbe obiettare che non è punto facile comprendere il motivo per cui, avvicinando ancora “un pochino” le due circonferenze luminose, i punti dovrebbero risultare *totalmente irrisolti* e, a mio avviso, avrebbe tutte le ragioni per dubitare del criterio di Rayleigh e, forse, dell’Insegnante medesimo.... Chi di noi, ignaro, non direbbe: “Come può la figura rappresentare il *limite estremo* di visione distinta quando essa ha una *macroscopica* deformazione a “8”?”

Una soluzione potrebbe essere quella di far loro osservare *direttamente* una coppia stellare stretta, prossima al p.r. dello strumento impiegato e, dall’altra, porsi in trattative con un Osservatorio per la ricerca d’archivio e l’eventuale cessione di quelle foto che, male esposte, ormai inutilizzate, evidenziano una continuità (o quasi tale) fra il disco centrale ed il primo anello luminoso. Da queste due esperienze si potrebbe stabilire che l’occhio, a differenza delle emulsioni sensibili, non è in grado di integrare i più bassi livelli d’illuminazione. Al di là dell’eventuale successo dell’iniziativa è importante comunicare che la fig. 1, ancorché didatticamente ineccepibile, va vista come una mera *traduzione convenzionale, irreversibile*, in linguaggio geometrico di un fenomeno fisico.

Ho notato, non senza un certo disappunto, la mancanza di una trattazione organica del p.r. degli strumenti ottici e, più in generale, di una scarsità di testi aggiornati di *Ottica generale* a corredo di quelli di Fisica generale utilizzati nel biennio di Matematica, Fisica ed Ingegneria nelle Università italiane. Per quanto attiene alla disponibilità dei testi di *Ottica applicata* all’industria se ne ricava un quadro così desolante da far ritenere, con fondamento, che l’aspetto formativo e innovativo potranno essere conseguiti solo attraverso l’uso di dispense in formato elettronico o cartaceo.

Nel 2001 svolsi un breve sondaggio informale nell'ambito universitario bolognese con lo scopo di rendermi conto sul metodo di apprendimento non verbale dell'Ottica fisica che gli Studenti potevano affidarsi al di fuori delle aule. Riuscii a rintracciare quattro titoli comprese le riproduzioni "underground". A questi testi aggiunti tre titoli non reperibili sul mercato nazionale dei quali normalmente mi avvalgo per motivi di ricerca. Mi resi conto che solo uno di essi [1] riportava gli sviluppi matematici che fanno oggetto delle prossime righe e perciò, ritenendoli di difficile reperibilità, li comunico agli studiosi interessati all'argomento.

2.0 Le conseguenze del calcolo

Allo studio dell'immagine di diffrazione si è soliti affiancare quello del *solido di diffrazione* – che si ottiene immaginando di far ruotare la macchia attorno all'asse verticale di ascissa zero – perché occorre far vedere come varia la sua luminosità a mano a mano che ci si allontana dal centro della macchia (fig. 2).

Cominciamo dunque dall'integrale che descrive la variazione, rispetto all'intensità unitaria I_0 al centro del disegno di diffrazione, per un altro punto qualunque:

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cos(h'r) \bullet dr \right]^2. \quad (1)$$

dove r è la variabile d'integrazione avente un valore mai superiore all'unità e che non ci interessa conoscerne il significato nelle applicazioni pratiche, mentre h' è un parametro ausiliario che determina la posizione del punto voluto ed esprimibile angularmente con:

$$h' = \frac{\pi D}{\lambda} \sin(\alpha') \quad (2)$$

e, linearmente, con:

$$h' = \frac{\pi D}{\lambda} \cdot \frac{z'}{f} \quad (3)$$

dove D è il diametro dell'obiettivo ($2R$) della fig. 1 e α' è quell'angolo sotto cui la distanza z' è vista dal centro dell'obiettivo e z' è la distanza del punto in esame dal centro della macchia. Per risolvere l'integrale (1) un tempo occorre Tavole per le funzioni trascendenti di Bessel: oggi può bastare un calcolatore programmabile da tasca sebbene il calcolo potrebbe richiedere un'attesa di alcuni minuti (vedi fig. 4). Alcuni anni or sono ottenni il solido di diffrazione utilizzando MathCad 6.0 con un Pentium a 266 Mhz in circa 1 secondo (fig. 2 e fig. 3).

Di tutti i punti tracciabili con l'integrale (1) ci interessano i massimi ed i minimi. Soprattutto il primo minimo interviene nel fissare il p.r. mentre l'utilità del parametro h' consiste nel non doverci occupare né del diametro dell'obiettivo né della sua lunghezza focale e nemmeno della lunghezza d'onda di lavoro. Nei casi pratici in cui si ha evidentemente a che fare con sistemi ottici reali si applica la formula (2) o la (3).

Lo studio grafico della funzione (1) evidenzia un susseguirsi senza fine di massimi di decrescente ampiezza con la conseguenza che nel disco centrale viene convogliato circa l'87% di tutta la radiazione luminosa presente sul piano focale; nel primo anello il 6,9%, nel secondo il 2,6%, nel terzo l'1,4%, nel quarto lo 0,9% e così via. Non ho notizie di nessun osservatore che abbia mai veduto a occhio il quarto anello: in fotografia esso si confonde con la luminosità propria del fondo del cielo.

Ho raccolto i valori dei minimi e dei massimi nella fig. 1: mi ripeto: è *molto importante* il primo minimo con ascissa $h' = 3,8317$.

La formula per esprimere (in radianti) il p.r. la si ricava evidenziando z' dalla (3):

$$z' = \frac{h' \lambda f}{\pi D} . \tag{4}$$

Il diametro, D , dell'obiettivo si può esprimere, con buona approssimazione, con:

$$D = 2 R = 2 f \sin u .$$

il quale, sostituito nella(4) e semplificato, porge:

$$z' = \frac{h' \lambda}{\pi \sin u} .$$

Sostituendo i valori già trovati si ha:

$$z' = \frac{3,8317 \lambda}{2\pi \sin u} .$$

ovvero:

$$z' = \frac{0,6098 \lambda}{\sin u} . \tag{5}$$

Se ricordiamo che in un mezzo con indice n la lunghezza d'onda diventa λ / n scriveremo:

$$z' = \frac{0,6098 \lambda}{n \sin u} . \tag{6}$$

Se si vuole esprimere la dimensione z' in secondi sessagesimali è sufficiente moltiplicare per 206264,8 che è il numero di secondi contenuto in un radiante.

$$z' = \frac{125780 \lambda}{n \sin u}$$

(7)

Questa formula ci conduce ad alcune considerazioni:

- 1) z' è la misura del p.r.: più piccolo è z' , maggiore si dichiara il p.r. medesimo.
- 2) Il prodotto $n \sin u$ – in cui n è l'indice del mezzo nel quale è immerso l'oggetto P_1P_2 per il semiangolo del cono di raggi intercettati dall'obiettivo – è chiamato *apertura numerica AN* e insieme con la formula (5) furono fissati per la prima volta da ERNST ABBE (1840 – 1905) per essere usati coi microscopi, sebbene con **0,5** nel numeratore (²): si consulti a pag. 133 la pubblicazione [2].
- 3) Maggiore è il valore di *AN*, minore è la distanza fra due punti in grado di essere risolti (in gergo si dice: “sdoppiati”)
- 4) Se interveniamo *solo* sulla lunghezza focale dell'obiettivo senza modificare l'apertura efficace varieranno le dimensioni di z' , ma **resterà invariato** il p.r. dello strumento (si rammenti la natura della luce).
- 5) Diminuendo la lunghezza d'onda λ (avete presente i colori blu-violacei di certi fiori o del mare all'orizzonte, oppure del fogliame visto standosene in una bella giornata soleggiata all'interno di un bosco in montagna?), aumenta il p.r.; aumentando l'apertura efficace aumenta il p.r. (³); aumentando, infine, l'indice n , aumenta il p.r.. Sono queste le tre strade maestre che conducono alla ragionevole gestione del p.r. degli strumenti, specie per applicazioni visuali.

² in tutti i testi di Fisica il numeratore della formula (6) è *realisticamente* arrotondato ai centesimi per cui essa diventa:

$$z' = \frac{0,61\lambda}{n \sin u}$$

³ non è possibile aumentare a piacimento l'apertura non solo per le difficoltà costruttive ma, soprattutto, per la turbolenza atmosferica. Ho personalmente notato che, a volte, il vecchio 1250 mm di Asiago rende come un 300 mm...

È inoltre facile vedere come il

$$\sin \alpha' = \frac{z'}{f}.$$

Sicché volendo esprimere il p.r. in funzione del diametro D ed in misura lineare si applica la (4) ottenendo:

$$z' = \frac{1,2197 \lambda f}{nD}. \quad (8)$$

Desiderando esprimerla angolarmente in secondi sessagesimali, si deve moltiplicare per 206 264,8:

$$z' = \frac{251581 \lambda}{nD}. \quad (9)$$

La formula (9) è di largo uso in Astronomia ma un po' meno nella valutazione degli strumenti topografici e geodetici (teodoliti, livelli, ecc.) e anche degli obiettivi foto-cinematografici per i quali si preferisce la (8). Le formule (6) e (7), come ho già riferito, sono di maggiore utilizzo in microscopia.

Se nella formula (9) al posto di λ inseriamo il valore della lunghezza d'onda per il quale l'occhio è maggiormente sensibile (pari a 0,000 555 mm, da alcuni Autori definito colore giallo-verde *citrino*, cioè *del limone*) e per n il valore mediato 1,000 294 5 ⁽⁴⁾ che è l'indice dell'aria rispetto al vuoto, otteniamo:

$$z' = \frac{139",6}{D}.$$

che arrotonderemo a:

⁴ lo riporto per pura informazione potendosi, in pratica, adottare $n = 1$. Ma, come è noto, nel calcolo delle ottiche per i microscopi ad immersione, l'indice del liquido assume un valore critico!

$$z' = \frac{140''}{D}$$

(10)

con D espresso, ovviamente, in millimetri.

3.0 Diventar grandi con senno

Se lo strumento viene usato con il concorso dell'occhio in tal caso il migliore *ingrandimento* lo si consegue quando il diametro dell'anello luminoso dell'oculare (chiamato: *pupilla d'uscita*) è prossimo al diametro della pupilla umana. Per le osservazioni in piena luce si può assumere un diametro pari a 1 mm, specie per gli individui più giovani e, di notte, di 8 mm. Più in generale si prendono pupille con diametri compresi fra 2 e 6 - 7 mm. Per uno strumento con obiettivo di 140 mm gli ingrandimenti "medi" saranno perciò compresi fra 18 e 140 x sebbene a volte, se le condizioni della mira lo permettono, si assume una pupilla di 0,5 mm e con ciò l'ingrandimento sale a 180 x.

Il potere risolutivo dell'occhio è molto variabile e, ricordo, non è mai consigliabile sottoporre quest'organo né a prolungati sforzi né prefiggendoci idiote prestazioni (in inglese: *performances*). Se, sperimentando, otteniamo una risoluzione attorno a 60" – 70" la si consideri un valore estremo che non è **mai** possibile, **nemmeno volendo**, mantenere per una intera sessione di lavoro. Più realisticamente (e saggiamente) utilizzeremo come riferimento un valore doppio o quadruplo: da 120" a 240". In questa evenienza l'ingrandimento ottimale lo si ricava dividendo il p.r. dell'occhio per quello dello strumento. Sempre con i dati dell'esempio, l'ingrandimento ottimale rimane compreso fra 60 e 240 x. Ingrandimenti troppo elevati aumentano progressivamente la diffrazione e di ciò se ne potrebbe tenere conto per eventuali esperienze scolastiche. Oggigiorno negli Osservatori astronomici non si fanno più tante prove sull'occhio o per lo meno esse non hanno più di certo la medesima importanza di 80 – 90 anni fa e stupisce che un noto studioso, sia pure 50 anni or sono, ne abbia tratto argomento per polemizzare, con malanimo, oltre tutto cadendo nel

ridicolo per gli svarioni in cui egli stesso incorse: vedi [1] della Bibliografia.

Se lo strumento viene usato fotograficamente, allora la migliore risoluzione andrebbe ricercata nell'accordo fra la dimensione media dei granuli d'argento e il raggio z' del disco centrale. Ciò, di norma, lo si ottiene in due modi: 1) aumentando la lunghezza focale ovvero 2) fotografando al fuoco *indiretto* (cioè con l'interposizione del microscopio-oculare).

4.0 Conclusione aperta...

Una “conclusione aperta” è un ossimoro esplicito. Intendevo dire che non è possibile porre la parola “fine” quando si parla del p.r. specie se si vuole fare riferimento agli attuali campi di ricerca (vedasi l'interferometria a macchie.) che però esulano dalle esperienze dei Laboratori delle Scuole superiori e chiaramente dalle associazioni di Astrofili anche se di ottimo livello. Alcuni affermano di essere riusciti ad aumentare il p.r con questa particolare tecnica ma altri (fra cui lo scrivente) propendono per un errore di interpretazione dei risultati o qualcosa di imponderabile che li ha falsati. Non è verosimile fare dell'interferometria con strumenti che mostrano una correzione sul fronte d'onda di appena $\frac{1}{2} \lambda$, propria degli strumenti amatoriali di tipo commerciale. In questa sede non mi è possibile soffermarmi. Gli interessati potrebbero consultare *Le stelle doppie* di Enrico Moltisanti, Milano, Sirio 1998: ivi si riferisce di una esperienza non professionale coronata, a detta dell'Autore, da successo.

Mi resta da illustrare molto brevemente un'obiezione che potrebbe essere mossa dagli Allievi a proposito di una apparente discordanza fra l'aspetto della curva della luce che si ottiene risolvendo l'integrale (1) e ciò che essi potrebbero vedere al telescopio. L'occhio non è sensibile ai bassi livelli d'illuminazione per cui l'Insegnante potrebbe mostrare una foto in cui viene annullata (o quasi) la fascia oscura fra il disco centrale e il primo anello di luce. Ne avevo già accennato a proposito del reperimento delle foto scartate dagli Osservatori astronomici. Altra prova, più aggressiva, è quella di mostrare come il limite teorico di Lord Rayleigh possa essere superato dagli

occhi degli stessi allievi al telescopio: un più piccolo angolo di risoluzione rispetto a quello previsto dal calcolo significa una minore dimensione del raggio del disco luminoso ed, evidentemente, una zona oscura più ampia delle risultanze della Teoria. Del resto il criterio di Rayleigh, senza arrivare a possedere viste d'aquila (vedasi Dawes e altri), può essere facilmente superato senza per ciò sovvertire la Teoria classica che è e rimane un punto fermo per i progettisti di lenti.

Pierre Dubochet

Marseille (France) 21 Agosto 2005

Bibliografia

- [1] Argentieri, Domenico. *Ottica industriale*, Milano, Hoepli, 1954
- [2] Conrady, A. E.. *Applied optics and optical design*, New York, Dover, 1991
- [3] Sears, F. W.. *Ottica*, Milano, Ambrosiana, 1991

(Si tratta di opere *specializzate* sull'argomento esaminato: le trattazioni *generiche* possono invece essere trovate in un qualunque testo universitario)

Diffrazione di due sorgenti puntiformi *

(le dimensioni trasversali sono notevolmente ingrandite)

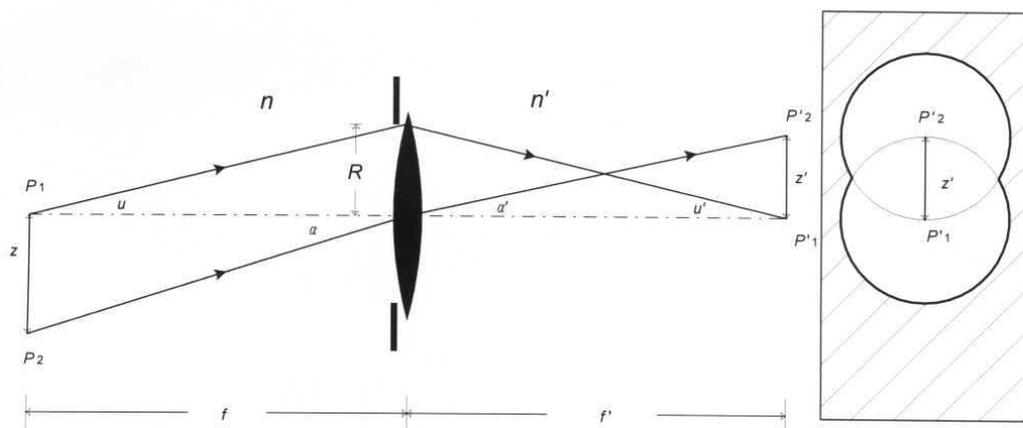


Fig. 1

* schema tratto da: Weston Sears, Francis. *Ottica*, Milano, Ambrosiana, 1991

rielaborato da Pierluigi Turini con *AutoSketch*.

Pierluigi Turini

Il solido di diffrazione

Drawing a Surface of Rotation about the Y Axis



Creates a surface by rotating a function of x about the Y axis.

$$f(x) = \left(\frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot \cos(x \cdot r) \, dr \right)^2$$

Enter a function $f(x)$:

Enter upper and lower limits of x interval:

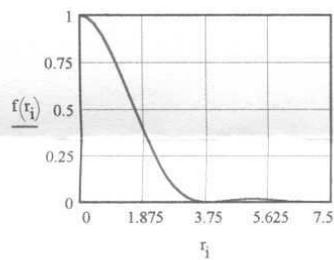
$a := 0$ $b := 7.5$

$xn := 35$ $m := 25$ $i := 0..xn$ $j := 0..m$

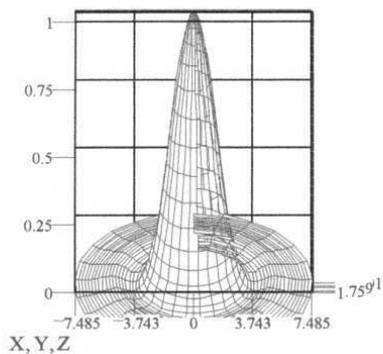
$$r_i := a + \frac{b-a}{xn} \cdot i \quad s_j := -\pi + \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{m}$$

$$X_{i,j} := r_i \cdot \sin(s_j) \quad Y_{i,j} := r_i \cdot \cos(s_j) \quad Z_{i,j} := f(r_i)$$

Plot of function of x :



Surface of rotation:

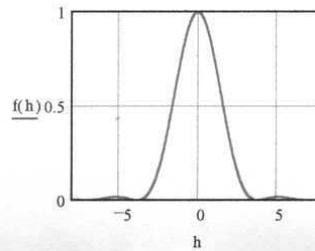


$$r := 0.5 \quad h := -8, -7.99, \dots, 8$$

$$f(h) := \left(\frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot \cos(h \cdot r) \, dr \right)^2$$

$$\left(\frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot \cos(h \cdot r) \, dr \right)^2$$

0.003455059098
0.003420736961
0.003385778994
0.003350197963
0.003314006991
0.003277219551
0.003239849468
0.003201910916
0.003163418413
0.003124386819
0.003084831336
0.003044767501
0.003004211185
0.002963178589
0.002921686242
0.002879750996
0.00283739002
0.002794620801
0.002751461136
0.002707929131
0.002664043193
0.002619822029
0.002575284639
0.002530450313
0.002485338623
0.002439969422
0.002397582817
0.002352156611
0.002306524891
0.002260708368
0.002214728007
0.002168605022
0.00212236087
0.002076017246
0.002029596076
0.00198311951



segue **Fig. 4**

D. Argentieri, Ottica industriale, Hoepli, Milano 1954.

A.) Pagina 295, formula 285; la quantità I/I_0 è espressa in radianti.

B.) Calcolo dei minimi e dei massimi.

M I N I M I	M A S S I M I
$h' = 3,831\ 705\ 970\ 21$	$h' = 0$
$h' = 7,015\ 586\ 669\ 81$	$I/I_0 = 1$
$h' = 13,323\ 691\ 936\ 3$	
$h' = 16,470\ 630\ 050\ 9$	$h' = 5,135\ 622\ 3$
$h' = 19,615\ 858\ 510\ 5$	$I/I_0 = 0,017\ 497\ 9$
	$h' = 8,417\ 244\ 2$
	$I/I_0 = 0,004\ 158\ 0$
	$h' = 14,795\ 951\ 8$
	$I/I_0 = 0,000\ 779\ 4$
	$h' = 17,959\ 819\ 5$
	$I/I_0 = 0,000\ 437\ 0$

I valori sono stati ottenuti col calcolo diretto e non interpolati.

Macchina calcolatrice: HP 48S & HP 48GX.

Bologna, 23.03.1996

- Pierluigi Turrini -

Post Scriptum:

*Galileo non fu in grado di risolvere il sistema di anelli (nel presente contesto intendi: “anello” al singolare) di Saturno non a causa dello scarso potere risolutivo dell’obiettivo del suo cannocchiale, ma per **la rozza lavorazione delle lenti e per le aberrazioni** di cui soffrivano.*