Iperbole

Dimostrazione che la funzione omografica corrisponde ad una iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, traslata:

$\mathfrak{I}: \quad x \cdot y = \dfrac{a^2}{2}$ in: $X\hat{0}Y$ dove: $0(0\,;\,0)$

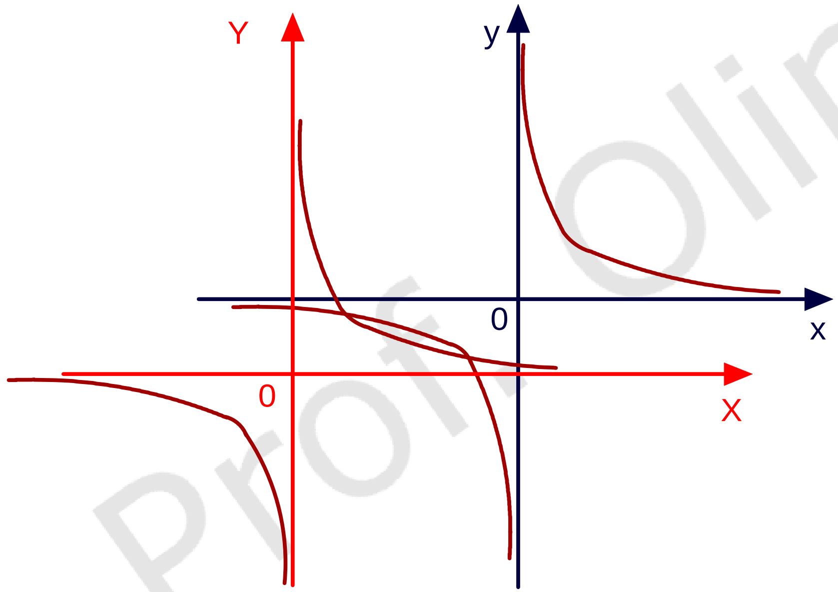
$\mathfrak{F}: \quad y = \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$ in: $x\hat{0'}y$ dove: $0'\left(-\dfrac{a}{c}\,;\,\dfrac{a}{c}\right)$

traslazione: $\begin{cases} x = X - \dfrac{d}{c} \\ y = Y + \dfrac{a}{c} \end{cases}$

Traslazione:

$$y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \Rightarrow Y + \frac{a}{c} = \frac{a \cdot \left(X - \frac{d}{c}\right) + b}{c \cdot \left(X - \frac{d}{c}\right) + d} \Rightarrow Y + \frac{a}{c} = \frac{a \cdot X - \frac{a \cdot d}{c} + b}{c \cdot X - d + d} \Rightarrow c \cdot X \cdot Y + a \cdot X = a \cdot X - \frac{a \cdot d}{c} + b \Rightarrow X \cdot Y = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2} \Rightarrow$$

$$X \cdot Y = k$$



Condizioni di esistenza per la funzione omografica:

- $c \neq 0$ perché se: $c = 0 \Rightarrow y = \dfrac{a}{d} \cdot x + \dfrac{b}{d}$ (che è una retta)
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ perché se: $a \cdot d - b \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{a} = k \Rightarrow \begin{matrix} a = k \cdot c \\ b = k \cdot d \end{matrix} \Rightarrow y = \dfrac{k \cdot c \cdot x + k \cdot d}{c \cdot x + d} = \dfrac{k \cdot (c \cdot x + \cdot d)}{c \cdot x + d} = k$

  $\Rightarrow y = k$ (che è una retta)
- $c \cdot x + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{d}{c}$ (altrimenti il denominatore sarebbe nullo)

Traslazione inversa:

$$X \cdot Y = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2} \qquad \to \qquad y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

$$t: \begin{cases} x = X - \dfrac{d}{c} \\ y = Y + \dfrac{a}{c} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t^{-1}: \begin{cases} X = x + \dfrac{d}{c} \\ Y = y - \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{d}{c}\right) \cdot \left(y - \frac{a}{c}\right) = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2} \Rightarrow x \cdot y - \frac{a}{c} \cdot x + \frac{d}{c} \cdot y - \frac{a \cdot d}{c^2} = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2} \Rightarrow c^2 \cdot x \cdot y - a \cdot c \cdot x + c \cdot d \cdot y - a \cdot d = b \cdot c - a \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(c^2 \cdot x + c \cdot d\right) \cdot y = a \cdot c \cdot x + b \cdot c \Rightarrow y = \frac{a \cdot c \cdot x + b \cdot c}{c^2 \cdot x + c \cdot d} \Rightarrow y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

Funzione omografica:

Asintoti:

Nell'iperbole del tipo: $x \cdot y = \dfrac{a^2}{2}$, sono gli assi cartesiani: $(y = 0 \quad ; \quad x = 0)$

In quella traslata (funzione omografica) saranno: $\left(x = \dfrac{d}{c} \quad ; \quad y = \dfrac{a}{c}\right)$ perché la nuova origine è: $0'\left(-\dfrac{d}{c} \; ; \; \dfrac{a}{c}\right)$

Vertici:

Bisogna intersecare una retta parallela ad una delle bisettrici dei quadranti, passante per $0'\left(-\dfrac{d}{c} \; ; \; \dfrac{a}{c}\right)$, con la curva.

Fuochi:

Si procede ottenendo con la traslazione, l'iperbole del tipo: $x \cdot y = \dfrac{a^2}{2}$ corrispondente; si calcolano i fuochi di quest'ultima e si applica la trasformazione inversa ai punti ottenuti.