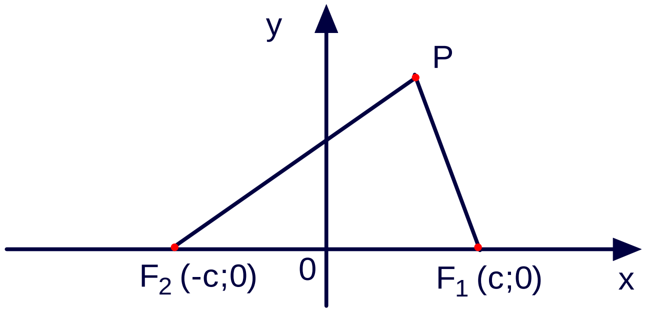
Iperbole

L'iperbole

Definizione:
L'iperbole è il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti F_1 ed F_2 detti fuochi dell'iperbole.



Presi i due fuochi sull'asse delle ascisse, consideriamo un punto generico P del piano cartesiano e chiamiamo 2° la differenza costante:

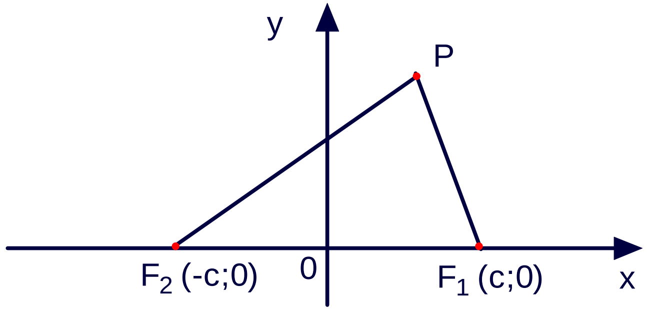
$$\left|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}\right| = 2 \cdot a$$

Dal triangolo PF_1F_2 si deduce (per le disuguaglianze triangolari) che:

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} > F_1F_2$$

quindi:

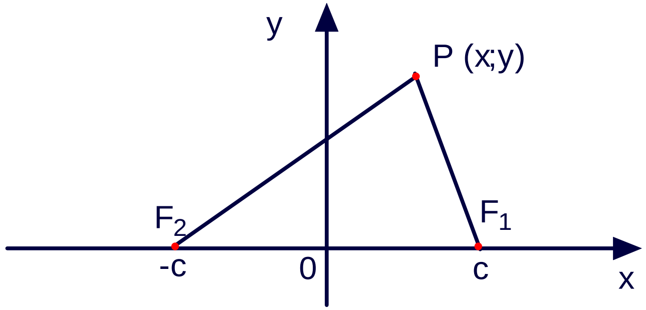
$$2 \cdot a > 2 \cdot c \quad \Rightarrow \quad a > c$$



Nel caso in cui P si trovasse sull'asse delle ascisse, esso assumerebbe posizioni simmetriche rispetto all'origine degli assi e risulterebbe:

$$\overline{P_1P_2} = 2 \cdot a$$

Calcoliamo l'equazione cartesiana dell'iperbole:



$$P\left(x\,;\,y\right)$$
$$F_1\left(c\,:\,0\right)$$
$$F_2\left(-c\,;\,0\right)$$

$$\left|\overline{PF_2}-\overline{PF_1}\right|=2\cdot a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2\cdot a \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(2\cdot a-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2\cdot c\cdot x+c^2+y^2=4\cdot a^2+x^2-2\cdot c\cdot x+c^2+y^{2^2}+4\cdot a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad 4\cdot c\cdot x-4\cdot a^2=4\cdot a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(c\cdot x-a^2\right)^2=\left(a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c^2\cdot x^2-2\cdot a^2\cdot c\cdot x+a^4=a^2\cdot x^2-2\cdot a^2\cdot c\cdot x+a^2\cdot c^2+a^2\cdot y^2 \quad \Rightarrow$$

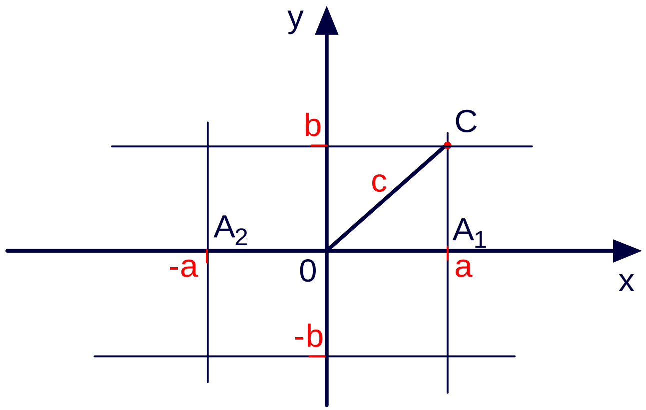
$$\Rightarrow \quad c^2\cdot x^2-a^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot c^2-a^4 \quad \Rightarrow \quad \left(c^2-a^2\right)\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot\left(c^2-a^2\right) \quad \Rightarrow$$

posto: $c^2-a^2=b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2=a^2+b^2$

$$\Rightarrow \quad b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2\cdot x^2}{a^2\cdot b^2}-\frac{a^2\cdot y^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{a^2\cdot b^2}{a^2\cdot b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Iperbole

L'iperbole:



a	è detto semiasse trasverso
b	è detto semiasse non trasverso

A_1 ed A_2 sono detti vertici dell'iperbole ed hanno coordinate:

$$A_1(a\ ;\ 0) \quad e \quad A_2(-a\ ;\ 0)$$

Riportiamo sull'asse delle y i segmenti di lunghezza b e sull'asse delle x i segmenti di lunghezza a; nel triangolo OA_1C si può applicare il teorema di Pitagora per cui:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

come da relazione precedente.

Per ottenere il disegno dell'iperbole:

Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema impossibile} \Rightarrow \text{L'iperbole non interseca l'asse y}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{L'iperbole interseca l'asse delle x nei punti } A_1(a\ ;\ 0) \text{ e } A_2(-a\ ;\ 0)$$

Simmetrie:

É simmetrica rispetto all'asse delle x:

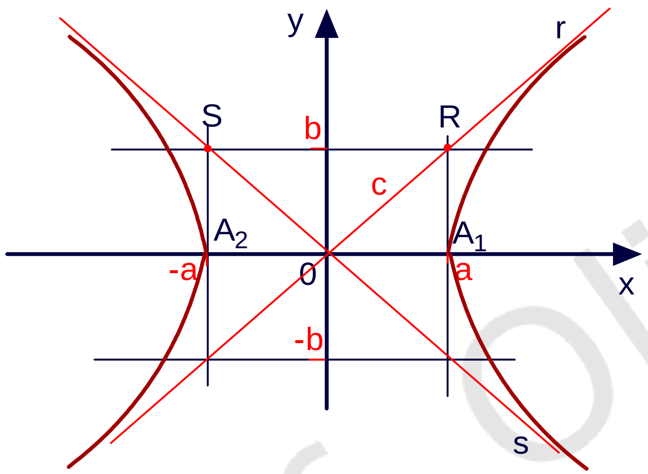
$P\ (x\ ;\ y)\quad P_1(x\ ;\ -y)$ sostituendo P_1 nell'equazione, questa resta soddisfatta

É simmetrica rispetto all'asse delle y:

$P_2(x\ ;\ y)\quad P_3(-x\ ;\ y)$ sostituendo P_3 nell'equazione, questa resta soddisfatta

É simmetrica rispetto all'origine:

$P_4(x\ ;\ y)\quad P_5(-x\ ;\ -y)$ sostituendo P_5 nell'equazione, questa resta soddisfatta



$R(a\ ;\ b)\quad S(-a\ ;\ b)$

retta in R: $y = m \cdot x$

$$b = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad m = \frac{b}{a}$$

r: $y = \frac{b}{a} \cdot x$

retta in S: $y = m \cdot x$

$$b = -m \cdot a \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{b}{a}$$

s: $y = -\frac{b}{a} \cdot x$

Queste due rette si chiamano ASINTOTI; delimitano l'iperbole senza mai toccarla.

Intersezione dell'iperbole con una retta qualunque: $y = m \cdot x$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = m \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{m^2 \cdot x^2}{b^2} = 1 \\ y = m \cdot x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot m^2 \cdot x^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot x^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 - a^2 \cdot m^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b^2 - a^2 \cdot m^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$$