Affinità

Si definisce affinità una corrispondenza biunivoca tra due piani o tra punti dello stesso piano che trasformi rette in rette conservando il parallelismo

$$T:\begin{cases} x' = a\cdot x + b\cdot y + p \\ y' = c\cdot x + d\cdot y + q \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{e} \quad T^{-1}:\begin{cases} x = \dfrac{d\cdot x' - b\cdot y' - d\cdot p + b\cdot q}{a\cdot d - b\cdot c} \\ y = \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - b\cdot c} \end{cases} \qquad (1)$$

$$(1):\begin{cases} x' = a\cdot x + b\cdot y + p \\ y' = c\cdot x + d\cdot y + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - b\cdot y - p}{a} \\ y' = c\cdot \dfrac{x' - b\cdot y - p}{a} + d\cdot y + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - b\cdot y - p}{a} \\ a\cdot y' = c\cdot x' - c\cdot b\cdot y - c\cdot p + a\cdot d\cdot y + a\cdot q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - b\cdot y - p}{a} \\ (a\cdot d - c\cdot b)\cdot y = -c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - b\cdot y - p}{a} \\ y = \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - c\cdot b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} - \dfrac{b}{a}\cdot \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - c\cdot b} - \dfrac{p}{a} \\ y = \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - c\cdot b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a\cdot d\cdot x' - \cancel{c\cdot b\cdot x'} + \cancel{b\cdot c\cdot x'} - a\cdot b\cdot y' - \cancel{b\cdot c\cdot p} + a\cdot b\cdot q - a\cdot d\cdot p + \cancel{b\cdot c\cdot p}}{a\cdot (a\cdot d - c\cdot b)} \\ y = \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - c\cdot b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a\cdot d\cdot x' - a\cdot b\cdot y' + a\cdot b\cdot q - a\cdot d\cdot p}{a\cdot (a\cdot d - c\cdot b)} \\ y = \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - c\cdot b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{d\cdot x' - b\cdot y' + b\cdot q - d\cdot p}{a\cdot d - c\cdot b} \\ y = \dfrac{-c\cdot x' + a\cdot y' + c\cdot p - a\cdot q}{a\cdot d - c\cdot b} \end{cases}$$

Ogni affinità essendo biunivoca sarà invertibile: T^{-1}

- Un punto U si dice unito rispetto a T se T(U) = U

Esercizio:

Calcolare la trasformazione univoca della seguente affinità: $T:\begin{cases} x' = 2\cdot x + y + 3 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$

$T:\begin{cases} x' = 2\cdot x + y + 3 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ si ha: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$ quindi si tratta di una affinità.

Risolvendo il sistema rispetto ad x ed y:

$$T^{-1}:\begin{cases} 2\cdot x + y = x' - 3 \\ x - y = y' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot x + y = x' - 3 \\ y = x - y' - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot x + x - y' - 1 = x' - 3 \\ y = x - y' - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot x = x' + y' - 2 \\ y = x - y' - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\cdot x' + \frac{1}{3}\cdot y' - \frac{2}{3} \\ y = x - y' - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\cdot x' + \frac{1}{3}\cdot y' - \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}\cdot x' + \frac{1}{3}\cdot y' - \frac{2}{3} - y' - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\cdot x' + \frac{1}{3}\cdot y' - \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}\cdot x' - \frac{2}{3}\cdot y' - \frac{5}{3} \end{cases}$$

Calcolo di eventuali punti uniti:

$\begin{cases} x = 2\cdot x + y + 3 \\ y = x - y - 1 \end{cases}$ da cui: $\begin{cases} -x = y + 3 \\ 2\cdot y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = y + 3 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = \frac{x-1}{2} + 3 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = \frac{x-1}{2} + 3 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\cdot x = x - 1 + 6 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\cdot x = 5 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{-\frac{5}{3} - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Affinità

Proprietà delle affinità:

- Le rette si trasformano in rette
- Il punto di intersezione di due rette si trasforma nel punto di intersezione delle rette trasformate
- Tre punti non allineati si trasformano in tre punti non allineati
  (non è detto che le caratteristiche del triangolo di vertici i tre punti precedenti si mantengano)
- Rette parallele si trasformano in rette parallele
  (ma, per esempio, un quadrato non è detto che si trasformi in un quadrato)
- Il punto medio di un segmento $\overline{PQ}$ viene trasformato nel punto medio del segmento trasformato $\overline{T(P)T(Q)}$
- Il triangolo di area $\mathbb{A}$ si trasforma in un triangolo di area $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \cdot |\det A|$ (A: matrice della trasformazione)

  Esercizio:

  Data $T: \begin{cases} x' = 2\cdot x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ calcolare la trasformazione inversa che dovrà risultare: $T': \begin{cases} x = \frac{1}{3}\cdot x' + \frac{1}{3}\cdot y' \\ y' = \frac{1}{3}\cdot x' - \frac{2}{3}\cdot y' \end{cases}$

  Calcolare l'area di vertici $P(0\,;\,1)$ $Q(1\,;\,1)$ $R(1\,;\,0)$ e quella del triangolo trasformato, verificando che l'area di $P'Q'R'$ sia pari a: $\frac{3}{2}$

- Le coniche vengono trasformate in coniche
- Le rette tangenti ad una conica si trasformano nelle rette tangenti alla conica trasformata.

- Prodotto di trasformazione:
  Chiariamo con un esempio:

Data: $T(x-2\cdot y\ ;\ -x+y) \quad \rightarrow \quad T'(3\cdot x+4\cdot y\ ;\ -2\cdot y)$

$T' * T = [3\cdot(x-2\cdot y)+4\cdot(-x+y)\ ;\ -2\cdot(-x+y)] = (-x-2\cdot y\ ;\ 2\cdot x-2\cdot y)$

mentre:

$T * T' = [(3\cdot x+4\cdot y)-2\cdot(-2\cdot y)\ ;\ -(3\cdot x+4\cdot y)+(-2\cdot y)] = (3\cdot x+8\cdot y\ ;\ -3\cdot x-6\cdot y)$

Affinità

Isometrie

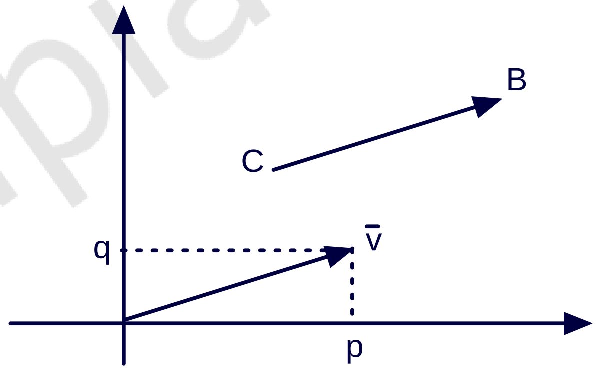
Si definisce Isometria ogni trasformazione (affinità) che conservi le distanze.

Identità

$$T: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \qquad \det A \quad \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Traslazione di vettori

$\bar{v}(p\ ;\ q)$



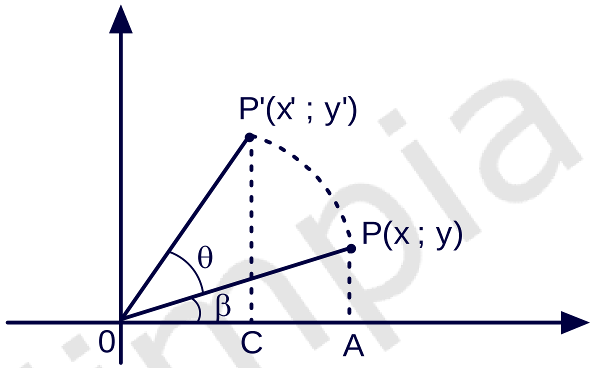
$$T: \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = 1$$

Affinità

Isometrie

Rotazione

Si chiama rotazione $\rho_{0,\theta}$ di centro 0 ed angolo θ la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che associa al punto 0 il punto 0 stesso ed a P il punto P' tale che $P\hat{0}P' = \theta$ ed $\overline{0P} = \overline{0P'}$.



Formula analitica:

$$P(x\,;\,y) \quad \to \quad P'(x'\,;y')$$

$$x = \overline{0A} = \overline{0P}\cdot\cos\beta$$

$$y = \overline{AP} = \overline{0P}\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$x' = \overline{0C} = \overline{0P}\cdot\cos(\beta+\theta) = \overline{0P}\cdot(\cos\beta\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\theta) = \overline{0P}\cdot\cos\beta\cdot\cos\theta - \overline{0P}\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\theta = x\cdot\cos\theta - y\cdot\operatorname{sen}\theta$$

$$y' = \overline{0C} = \overline{0P}\cdot\operatorname{sen}(\beta+\theta) = \overline{0P}\cdot(\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\beta) = \overline{0P}\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\theta + \overline{0P}\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\beta = x\cdot\operatorname{sen}\theta + y\cdot\cos\theta$$

quindi:

$$\rho_{0;\theta}:\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\operatorname{sen}\theta \\ y' = x\cdot\operatorname{sen}\theta + y\cdot\cos\theta \end{cases} \quad \text{con:} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Affinità

In generale una affinità: $\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y \\ y' = b \cdot x + a \cdot y \end{cases}$ con: $a^2 + b^2 = 1$

è una rotazione con centro l'origine ed angolo θ tale che: $\cos\theta = a$ e $\mathrm{sen}\theta = b$

La trasformazione inversa sarà: $\begin{cases} x = \ \ x' \cdot \cos\theta + y' \cdot \mathrm{sen}\theta \\ y = -x' \cdot \mathrm{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$

Esercizio da eseguire:

Data la rotazione:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y \end{cases}$$

calcolare i trasformati P' di $P(1\ ;\ 0)$ e Q' di $Q(0\ ;\ 1)$ e della retta passante per P e Q verificando che si abbia: $\left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot x' - \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot y' + 2 = 0$

Affinità

Isometrie

Rototraslazione

$$\rho_{0;\theta}:\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot \text{sen}\theta \\ y' = x\cdot \text{sen}\theta + y\cdot\cos\theta \end{cases}$$ rotazione

$$\tau_{\vec{v}}:\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$ traslazione

La composizione: $\tau_{\vec{v}} * \rho_{0;\theta}:\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot \text{sen}\theta + p \\ y' = x\cdot \text{sen}\theta + y\cdot\cos\theta + q \end{cases}$

Si può dimostrare che la composizione di una rotazione con una traslazione non è commutativa.

Affinità

Isometrie

Simmetria centrale

Si definisce simmetria centrale Sc di centro C una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che associa ad ogni punto P un punto P' tale che C sia il punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

$$Sc: \begin{cases} x' = 2 \cdot x_0 - x \\ y' = 2 \cdot y_0 - y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = 1$$

Esercizio da eseguire:
Applicare al punto $P(2\ ;\ 3)$ prima la simmetria di centro $C_1(1\ ;\ 1)$ e poi la simmetria di centro $C_2(-2\ ;-3)$ verificando che $P''(-4\ ;-5)$

Calcolo della curva simmetrica γ_{P_0} di una curva γ.
Esempio::
Data la curva $y = x^2$ e sia $P_0(1\ ;\ -1)$ il centro di simmetria. La simmetria centrale sia: $Sc: \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$

La simmetria centrale assegnata, applicata alla curva assegnata, produce:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad -2 - y = (2 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad -y = 2 + 4 - 4 \cdot x + x^2 \quad \Rightarrow \quad y = -x^2 + 4 \cdot x - 6$$

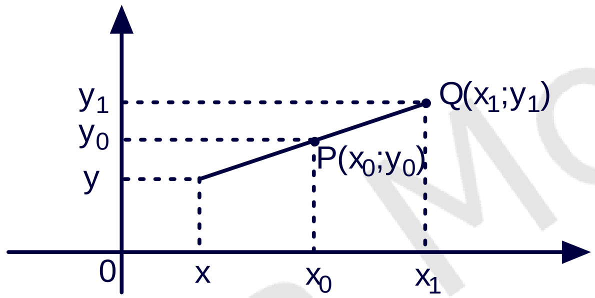
Esempio:
Verificare che la curva $4 \cdot x^2 - y^2 - 16 \cdot x - 6 \cdot y + 6 = 0$ è simmetrica rispetto al punto $P_0(2\ ;\ -3)$
Dato $P(x\ ;\ y)$ il simmetrico sia $P_1(4 - x\ ;\ -6 - y)$ che sostituito nell'equazione della curva:

$$4 \cdot (4 - x)^2 - (-6 - y)^2 - 16 \cdot (4 - x) - 6 \cdot (-6 - y) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 64 - 32 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 36 - 12 \cdot y - y^2 - 64 + 16 \cdot x + 36 + 6 \cdot y + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot x^2 - y^2 - 16 \cdot x - 6 \cdot y + 6 = 0$$

Esempio:
Determinare l'eventuale centro di simmetria della curva: $x \cdot y - 2 \cdot x + 3 \cdot y + 1 = 0$

Detto $P_0(x_0\ ;\ y_0)$ l'eventuale centro di simmetria e $Q(x_1\ ;\ y_1)$ un punto della curva si ha:



$$\begin{cases} \dfrac{x+x_1}{2} = x_0 \\ \dfrac{y+y_1}{2} = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot x_0 - x_1 \\ y = 2 \cdot y_0 - y_1 \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione della curva si ha:

$$x \cdot y - 2 \cdot x + 3 \cdot y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot x_0 - x_1) \cdot (2 \cdot y_0 - y_1) - 2 \cdot (2 \cdot x_0 - x_1) + 3 \cdot (2 \cdot y_0 - y_1) + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 2 \cdot x_0 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_0 \underline{+ x_1 \cdot y_1} - 4 \cdot x_0 + 2 \cdot x_1 + 6 \cdot y_0 - 3 \cdot y_1 \underline{+1} = 0$$

Poiché Q è un punto della curva si verifica che:

$$x_1 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 + 3 \cdot y_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot y_1 + 1 = 2 \cdot x_1 - 3 \cdot y_1$$

che sostituita nel calcolo precedente:

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 2 \cdot x_0 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_0 \underline{+ x_1 \cdot y_1} - 4 \cdot x_0 + 2 \cdot x_1 + 6 \cdot y_0 - 3 \cdot y_1 \underline{+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 2 \cdot x_0 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_0 \underline{+2 \cdot x_1} - 4 \cdot x_0 + 2 \cdot x_1 + 6 \cdot y_0 - 3 \cdot y_1 \underline{-3 \cdot y_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 2 \cdot x_0 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_0 + 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_0 + 6 \cdot y_0 - 6 \cdot y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (2 - x_0) \cdot x_1 - 2 \cdot (x_0 + 3) \cdot y_1 + 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 4 \cdot x_0 + 6 \cdot y_0 = 0$$

Ora, dovendo valere l'identità per ogni punto $Q(x_1\ ;\ y_1)$, dovrà essere:

$$\begin{cases} 2 - y_0 = 0 \\ x_0 + 3 = 0 \\ 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 4 \cdot x_0 + 6 \cdot y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ x_0 = -3 \\ 4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 4 \cdot x_0 + 6 \cdot y_0 = 0 \end{cases}$$

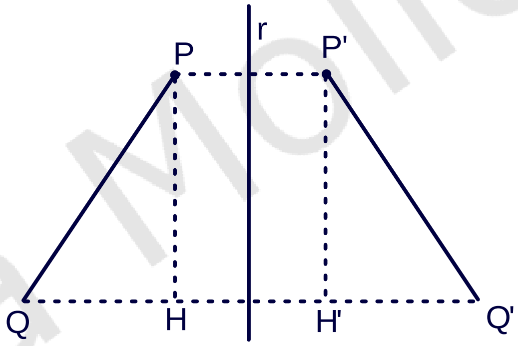
La coppia di valori $(x_0\ ;\ y_0)$ soddisfa la terza equazione scritta, infatti:

$$4 \cdot x_0 \cdot y_0 - 4 \cdot x_0 + 6 \cdot y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot (-3) \cdot (2) - 4 \cdot (-3) + 6 \cdot (2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

pertanto il punto $P(-3\ ;\ 2)$ è centro di simmetria per la curva.

Isometrie

Simmetria assiale



Si definisce simmetria assiale rispetto ad una retta “r” l’affinità Sr che lascia uniti i punti P di r e che trasforma ogni punto P appartenente ad r nel punto P’ tale che r sia l’asse del segmento $\overline{PP'}$.
Oltre ai punti di r anche tutte le rette perpendicolari ad r sono unite nella trasformazione.

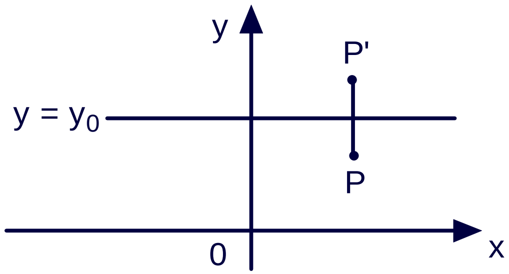
Forme analitiche:

- Simmetria rispetto ad una retta $y = y_0$

$$Sr: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2 \cdot y_0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} P(x\,;y) \\ P'(x'\,;y') \end{matrix}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = -1$$

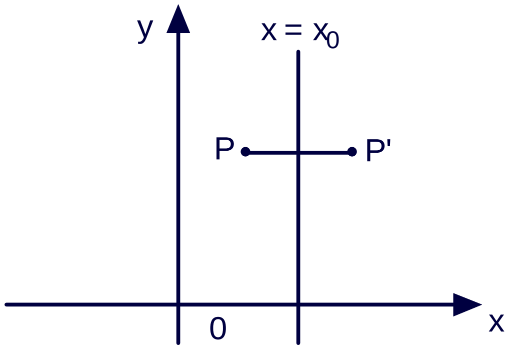


- Simmetria rispetto ad una retta $x = x_0$

$$Sr: \begin{cases} x' = -x + 2 \cdot x_0 \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{matrix} P(x\,;y) \\ P'(x'\,;y') \end{matrix}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = -1$$



Isometrie

Simmetria assiale

- Simmetria rispetto alla retta $y = m \cdot x + q$

$$S_r: \begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[\left(1-m^2\right)\cdot x + 2\cdot m\cdot y - 2\cdot m\cdot q\right] \\ y' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x + \left(m^2-1\right)\cdot y + 2\cdot q\right] \end{cases} \qquad \begin{matrix} P(x\,;\,y) \\ P'(x'\,;\,y') \end{matrix}$$

vedi **Nota**

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2\cdot m}{1+m^2} \\ \dfrac{2\cdot m}{1+m^2} & \dfrac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = -1$$

- Simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante:

$$S_r: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad \begin{matrix} P(x\,;\,y) \\ P'(x'\,;\,y') \end{matrix}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = -1$$

- Simmetria rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante:

$$S_r: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \qquad \begin{matrix} P(x\,;\,y) \\ P'(x'\,;\,y') \end{matrix}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det A = -1$$

Affinità

Isometrie

Simmetria assiale

Nota

$$M_{PP'}\left(\frac{x+x'}{2}\ ;\ \frac{y+y'}{2}\right) \qquad m_{PP'}=\frac{y-y'}{x-x'}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y+y'}{2}=m\cdot\dfrac{x+x'}{2}+q\\[2ex]\dfrac{y-y'}{x-x'}=-\dfrac{1}{m}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+y'=m\cdot\left(x+x'\right)+2\cdot q\\[2ex]y-y'=-\dfrac{1}{m}\cdot\left(x-x'\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+y'=m\cdot x+m\cdot x'+2\cdot q\\[2ex]y-y'=-\dfrac{1}{m}\cdot x+\dfrac{1}{m}\cdot x'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{y+y'-m\cdot x-2\cdot q}{m}\\[2ex]y-y'=-\dfrac{1}{m}\cdot x+\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{y+y'-m\cdot x-2\cdot q}{m}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{y+y'-m\cdot x-2\cdot q}{m}\\[2ex]m^2\cdot y-m^2\cdot y'=-m\cdot x+y+y'-m\cdot x-2\cdot q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{y+y'-m\cdot x-2\cdot q}{m}\\[2ex]\left(1+m^2\right)\cdot y'=m^2\cdot y+m\cdot x-y+m\cdot x+2\cdot q\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{y+y'-m\cdot x-2\cdot q}{m}\\[2ex]\left(1+m^2\right)\cdot y'=m^2\cdot y+m\cdot x-y+m\cdot x+2\cdot q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{y+y'-m\cdot x-2\cdot q}{m}\\[2ex]y'=\dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y+2\cdot q\right]\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{m}\cdot\left\{\dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y+2\cdot q\right]+y-m\cdot x-2\cdot q\right\}\\[2ex]y'=\dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y+2\cdot q\right]\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{2\cdot m\cdot x+m^2\cdot y-\cancel{y}+\cancel{2\cdot q}+\cancel{y}-m\cdot x-\cancel{2\cdot q}+m^2\cdot y-m^3\cdot x-2\cdot q\cdot m^2}{1+m^2}\\[2ex]y'=\dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y+2\cdot q\right]\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{m\cdot x - m^3\cdot x + 2\cdot m^2\cdot y - 2\cdot q\cdot m^2}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x + \left(m^2-1\right)\cdot y + 2\cdot q\right] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[\left(1-m^2\right)\cdot x + 2\cdot m\cdot y - 2\cdot m\cdot q\right] \\ y' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[2\cdot m\cdot x + \left(m^2-1\right)\cdot y + 2\cdot q\right] \end{cases}$$

Affinità

Isometrie

Simmetria assiale

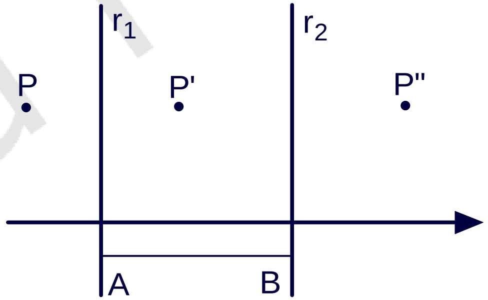
Composizione di due simmetrie assiali

Sr_1 e Sr_2 siano due simmetrie assiali rispetto alle rette r_1 ed r_2; per stabilire il risultato della loro composizione consideriamo due casi:

1. r_1 parallela ad r_2

   In questo caso la composizione delle due simmetrie corrisponde ad una traslazione di vettore $2 \cdot \overline{AB}$, con $A \in r_1$ e $B \in r_2$ ed $\overline{AB}$ perpendicolare alle due rette.

   L'inversa è una traslazione di $-2 \cdot \overline{AB}$
   Tale composizione non è commutativa.

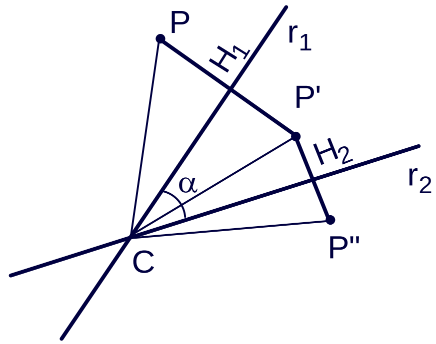


2. r_1 incidente r_2

   La composizione delle due simmetrie è una rotazione di angolo $2 \cdot \alpha$ come si deduce facilmente dalla eguaglianza degli angoli:
   $P\hat{C}H_1 = H_1\hat{C}P'$ e $P'\hat{C}H_2 = H_2\hat{C}P''$

   L'inversa è una rotazione di angolo $-2 \cdot \alpha$
   Tale composizione non è commutativa.

$r_1 \hat{} r_2 = \alpha$



Affinità

Isometrie

Simmetria assiale

Esempio

Scrivere le formule delle simmetrie assiali Sr_1 e Sr_2 rispetto alle rette $r_1: \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$ ed $r_2: \quad y = \sqrt{3} \cdot x$.

Verificare che la trasformazione composta $Sr_2 * Sr_1$ è la rotazione di angolo $2 \cdot r_1 \hat{} r_2 = 60°$, attorno al punto 0 origine degli assi.

Dati i punti $P(x\,;\,y)$ e $P'(x'\,;\,y')$ la simmetria rispetto ad r_1 è:

$$Sr_1: \begin{cases} x' = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot y\right) \\ y' = \frac{3}{4}\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y \end{cases}$$

IL trasformato $P''(x''\,;\,y'')$ di P’ rispetto alla retta r_2 è:

$$Sr_2: \begin{cases} x'' = \frac{1}{4}\left(-2 \cdot x' + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot y'\right) \\ y'' = \frac{1}{4}\left(2 \cdot \sqrt{3} \cdot x' + 2 \cdot y'\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y' \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x' + \frac{1}{2} \cdot y' \end{cases}$$

Applicando la trasformazione composta:

$$Sr_2 * Sr_1 = \begin{cases} x'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y\right) \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y \end{cases}$$

che confrontata con le equazioni analitiche della rotazione corrisponde ad una rotazione di 60° intorno all’orinine degli assi.

Affinità

Isometrie

Simmetria assiale

Matrici ortonormali

Consideriamo l'affinità: $\begin{cases} x' = 2 \cdot x + y \\ y' = 5 \cdot x + 3 \cdot y \end{cases}$ Essa. ha la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $\det A = 1$,ma essa non è una isometria, infatti i punti $O \equiv (0\ ;\ 0)$ e $U \equiv (1\ ;\ 0)$ vengono trasformati in $O' \equiv (0\ ;\ 0)$ e $U' \equiv (2\ ;\ 5)$ e la distanza $\overline{OU} = 1$ si trasforma in $\overline{O'U'} = \sqrt{2} \neq 1$.

Vediamo, allora, quali caratteristiche deve avere la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ affinché l'affinità $\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases}$ rappresenti le equazioni di una isometria.

Consideriamo due punti $P \equiv (x_1\ ;\ y_1)$ e $Q \equiv (x_2\ ;\ y_2)$ e calcoliamo le coordinate dei trasformati $P' \equiv (a \cdot x_1 + b \cdot y_1\ ;\ c \cdot x_1 + d \cdot y_1)$ e $Q' \equiv (a \cdot x_2 + b \cdot y_2\ ;\ c \cdot x_2 + d \cdot y_2)$.

$\overline{PQ'}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\overline{P'Q'}^2 = (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 - a \cdot x_2 - b \cdot y_2)^2 + (c \cdot x_1 + d \cdot y_1 - c \cdot x_2 - d \cdot y_2)^2 =$

$= a^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 + b^2 \cdot (y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) + c^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 + d^2 \cdot (y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) =$

$= (a^2 + c^2) \cdot (x_1 - x_2)^2 + (b^2 + d^2) \cdot (y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot (a \cdot b + c \cdot d) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2)$

Pertanto le distanze $\overline{PQ'}$ e $\overline{P'Q'}$ coincidono se si verificano le tre condizioni:

1) $a^2 + c^2 = 1$
2) $b^2 + d^2 = 1$
3) $a \cdot b + c \cdot d = 0$

Isometrie

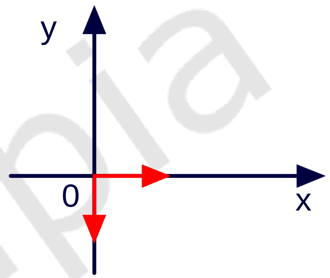
Simmetria assiale

Una matrice che soddisfa queste tre condizioni si dice ortonormale, cioè:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è tale che i vettori $(a\ ,\ c)$ e $(b\ ,\ d)$ hanno lunghezza 1 (normale) e sono ortogonali.

Esempio:

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è ortonormale per cui determina una isometria (simmetria rispetto all'asse x).



Si deduce facilmente che le matrici ortonormali hanno determinante uguale ad +1 o –1.

Nota sulle Isometrie

Isometrie dirette ed indirette

La traslazione, la rotazione e la simmetria centrale si dicono isometrie **diretta** perché per ottenere la figura F' trasformata di F basta trascinarla sul foglio.
La simmetria assiale si dice isometria **indiretta** perché per ottenere la figura F' trasformata di F c'é bisogno di un ribaltamento.

Similitudine

Una similitudine Σ è una affinità dai punti del piano che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti, cioè se $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ e $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$ sono coppie di segmenti corrispondenti, si avrà: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = k$

Formule analitiche:

Similitudine diretta:

$$\Sigma: \begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y + p \\ y' = b \cdot x + a \cdot y + q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & +a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

Similitudine indiretta:

$$\Sigma: \begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y + p \\ y' = b \cdot x - a \cdot y + q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} a & +b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 < 0$$

Il rapporto k costante tra segmenti corrispondenti è detto rapporto di similitudine e vale: $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

Le isometrie sono particolari similitudini di rapporto $k = 1$

Nelle similitudini dirette o indirette le figure trasformate vengono descritte nello stesso verso oppure in versi opposti

Similitudine

Proprietà

Oltre alle proprietà delle affinità le similitudini godono delle proprietà di trasformare:

- Triangoli in triangoli simili
- Rette $\perp$ in rette $\perp$
- Circonferenze in circonferenze

Date due figure F ed F' corrispondenti in una similitudine di rapporto k, allora :
perimetro (F') = k · perimetro (F)
area (F') = k^2 · area (F)

Esempio:
Applicare la similitudine:

$$\begin{cases} x' = 2\cdot x - \dfrac{3}{2}\cdot y + 2 \\ y' = \dfrac{3}{2}\cdot x + 2\cdot y - 2 \end{cases}$$

ai punti $A(-2\ ;\ 0)$, $0(0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 4)$; si otterrà: $A'(-2\ ;-5)$, $0'(2\ ;-2)$, $B'(-4\ ;\ 6)$

Calcolare $\overline{0A}$, $\overline{0B}$, $\overline{AB}$ e $\overline{0'A'}$, $\overline{0'B'}$, $\overline{A'B'}$.

Verificare che il rapporto di similitudine sia: $k = \dfrac{5}{2}$

Calcolare il determinante della matrice, verificando che: $k = \sqrt{|\det A|}$

Omotetia

Dato un punto C del piano ed un numero reale “a” non nullo, si definisce omotetia di centro C e rapporto a la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che ad ogni punto P fa corrispondere in modo univoco un punto P’ tale che: $\overline{CP'} = a \cdot \overline{CP}$

Se $a > 0$

per esempio **a = 3**

Se $a < 0$

per esempio **a = -3**

Casi particolari:

- Se $a = +1 \Rightarrow$ identità (tutti i punti sono uniti)
- Se $a = -1 \Rightarrow$ simmetria di centro C
- Se $|a| > 1 \Rightarrow$ dilatazione
- Se $|a| < 1 \Rightarrow$ contrazione
- Se $a \neq 1 \Rightarrow$ C è unito come tutte le rette passanti per C

Affinità

Omotetia

Formule analitiche

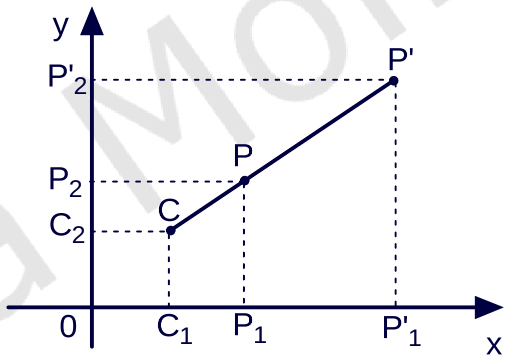
Per Talete:

$$\begin{array}{l}\overline{C_1P'} = a \cdot \overline{C_1P_1} \\ \overline{C_2P'_2} = a \cdot \overline{C_2P_2}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}x' - x_0 = a \cdot (x - x_0) \\ y' - y_0 = a \cdot (y - y_0)\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = a \cdot (x - x_0) + x_0 \\ y' = a \cdot (y - y_0) + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a \cdot x + x_0 \cdot (1 - a) \\ y' = a \cdot y + y_0 \cdot (1 - a) \end{cases}$$

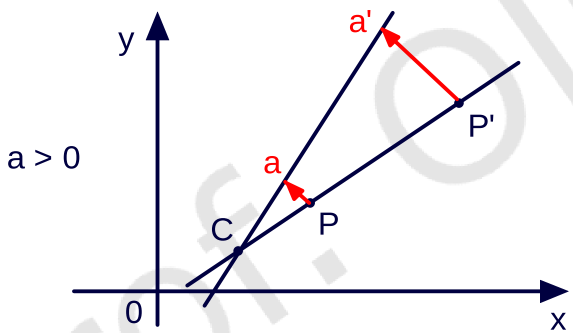
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = a \cdot x + h \\ y' = a \cdot y + k \end{cases} \quad \text{con:} \quad \begin{array}{l} h = x_0 \cdot (1 - a) \\ k = y_0 \cdot (1 - a) \end{array}$$

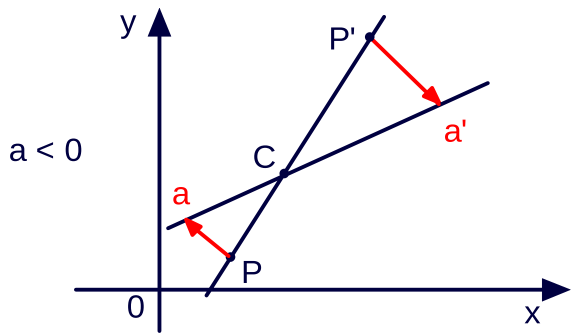
$P(x\,;\,y) \quad P'(x'\,;\,y') \quad C(x_0\,;\,y_0)$



Questo è un caso particolare di similitudine di matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a^2$ quindi è una similitudine diretta

Analizziamo i casi in cui $a > 0$ ed $a < 0$.





Proprietà di collegamento.

- Ogni trasformazione composta da una omotetia e da una isometria è una similitudine.
- Dato un punto C nel piano, ogni similitudine di rapporto k si può considerare composta in un solo modo da una omotetia di centro C e rapporto k e da una isometria.

Omotetia

Esempio 1:

- Data l'omotetia $\Omega: \begin{cases} x' = -3 \cdot x - 4 \\ y' = -3 \cdot y + 8 \end{cases}$ studiarne le caratteristiche.

  Si deduce che $a = -3$; il centro si trova cercando il punto medio: $\begin{cases} x = -3 \cdot x - 4 \\ y = -3 \cdot y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot x = -4 \\ 4 \cdot y = +8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = +2 \end{cases} \Rightarrow C(-1\,;\,2)$
- Calcolare i punti corrispondenti di $A(2\,;\,2)$ e $B(-4\,;\,1)$ ottenendo $A'(-10\,;\,2)$ e $B'(8\,;\,5)$
- Rappresentare graficamente

Esempio 2:

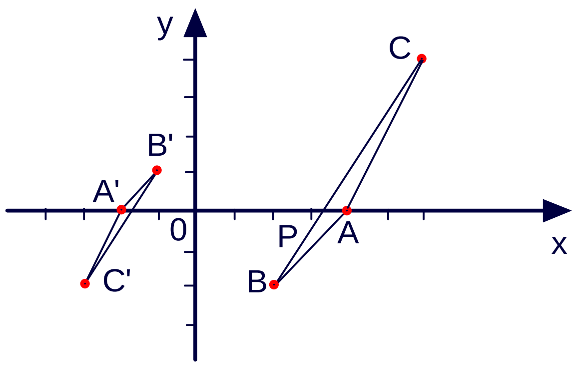
- Data l'omotetia $\Omega: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2} \cdot x \\ y' = -\frac{1}{2} \cdot y \end{cases}$ determinare il trasformato del triangolo di vertici: $A(4\,;\,0)$ $B(2\,;\,-2)$ $C(6\,;\,4)$.
- Rappresentare graficamente

Si deduce che $a = -\frac{1}{2}$

I vertici del triangolo trasformato risultano:

$A'(-2\,;\,0)$ $B'(-1\,;\,1)$ $C'(-3\,;\,-2)$

Poiché $a = -\frac{1}{2} < 0$ punti corrispondenti, allineati con 0, sono da parti opposte rispetto ad 0.



Composizione di omotetie:

Si abbiamo due omotetie Ω_{C,k_1} e Ω_{C,k_2}. Le vogliamo comporre ottenendo:. $\Omega_{C,k}$.
Cioè: $\Omega_{C,k} = \Omega_{C,k_1} * \Omega_{C,k_2}$ con: $k = k_1 \cdot k_2$

$$\overline{CR} = k_2 \cdot \overline{CQ} = k_1 \cdot \left(k_2 \cdot \overline{CP}\right) = k \cdot \overline{CP}$$

La composizione di due omotetie gode della proprietà commutativa.

$$\Omega_{C,k} = \Omega_{C,k_1} * \Omega_{C,k_2} = \Omega_{C,k_2} * \Omega_{C,k_1}$$

Casi particolari:

- $k_2 = \dfrac{1}{k_1} \quad \Rightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = 1 \quad \Rightarrow$ identità
- $k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \Rightarrow$ simmetria rispetto a C