

Prova scritta di Analisi Matematica III
Corso di Laurea Triennale in Fisica

24 Giugno 2010

1) Si studino la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1} \sqrt{x^2 + \frac{2}{n}}.$$

Si studi, inoltre, la convergenza della serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$.

2) Si sviluppi in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = |x| - \pi \quad (|x| \leq \pi)$$

estesa per periodicità su tutto \mathbf{R} e si studi la convergenza, puntuale e uniforme, della stessa.

Si usino i risultati ottenuti per provare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3) Si dica se per l'equazione differenziale

$$y' = 2 - 2y^2$$

valgono le ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2 - 2y^2 \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di definizione delle soluzioni.

4) Si determini l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 + e^{2x} \\ y_2' = 2y_2 + 4y_3 \\ y_3' = y_2 + 2y_3. \end{cases}$$