Università degli Studi di Ferrara

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica
Indirizzo: Matematica Pura

Sistemi lineari, singolarità delle curve piane e superfici razionali

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Philippe Ellia

Laureanda:
Ludovica Chiodera

Anno Accademico 2007-2008

Quanto piú astratta,
é la veritá che vuoi insegnare,
tanto piú devi sedurre ad essa
anche i sensi.
F. W. Nietzsche

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

In questa tesi viene presentato uno strumento fondamentale in geometria algebrica, lo scoppiamento. Dopo aver introdotto il concetto di scoppiamento e discusso le sue principali proprietà vedremo alcune sue importanti applicazioni, ad esempio la risoluzione delle singolarità. Infine proveremo un teorema classico usando la teoria degli scoppiamenti e dei sistemi lineari: il teorema delle 27 rette nella cubica liscia.
Nel primi capitoli di questa tesi, affrontiamo il problema delle singolaritá delle curve piane e di come sia possibile data una curva avere un modello liscio birazionale alla curva di partenza.
Nel primo capitolo introduciamo il concetto di scoppiamento. Vengono studiate le proprietá di questa applicazione e della sua immagine. In particolare vedremo alcuni esempi su curve come la cubica nodale, la cuspide e il tacnodo. Noteremo inoltre che, in alcuni casi, un solo scoppiamento non basta per risolvere le singolaritá.
Nel secondo capitolo affrontiamo la risoluzione delle singolaritá delle curve piane. Studieremo una particolare applicazione birazionale, la trasformazione quadrica. Si vedrá infine che con un numero finito di scoppiamenti è sempre possibile ottenere un modello liscio per ogni curva piana.
Nel terzo capitolo introduciamo un altro argomento, i sistemi lineari. Il nostro scopo é quello di studiare proprietá di superfici razionali, usando la loro rappresentazione piana, prima da un punto di vista piú generale, poi andando nel particolare. In questo capitolo vedremo la fondamentale importanza che puó avere lo scoppiamento nel trattare sistemi lineari con punti base.
Nei capitoli a seguire andremo ad analizzare superfici derivanti da particolari sistemi lineari. Infatti nel capitolo quattro studieremo le superfici razionali date da sistemi di coniche. Ad esempio la superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$, data da un sistema di coniche privo di punti base e lo scroll cubico di $\mathbb{P}^4$ dato da un sistema di coniche con un punto base. In seguito faremo una breve introduzione sulle quadriche di $\mathbb{P}^3$ per studiare la quadrica liscia e il cono quadrico attraverso la

loro rappresentazione piana.
Nel quinto capitolo analizzeremo i sistemi di cubiche, in particolare ci soffermeremo sul sistema di cubiche avente sei punti base, di cui non tre allineati e non sei su una conica. Tale sistema dará luogo alla superficie cubica liscia di $\mathbb{P}^3$, descriveremo le sue proprietá e dimostreremo il famoso teorema delle ventisette rette. Infatti una superficie cubica liscia di $\mathbb{P}^3$ contiene esattamente ventisette rette, grazie alla rappresentazione piana non sará difficile individuarle. Infine osserveremo le particolari simmetrie tra queste rette.

Capitolo 1

Scoppiamento di un punto nel piano.

1.1 Proiezione da un punto su una retta

Sia $O = (0 : 0 : 1)$ un punto di $\mathbb{P}^2$ e sia L una retta che non passa per O, possiamo supporre L la retta di equazione $X_2 = 0$. Allora possiamo considerare l'applicazione $\pi : \mathbb{P}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$ che manda un punto P, di $\mathbb{P}^2 \setminus \{0\}$ nell'intersezione di L con $< P, O >$ ovvero con la retta passante per P e O. Poniamo dunque $\pi(P) = Q$ dove $Q = L \cap < P, O >$. Tale applicazione è ben definita in quanto per due punti passa una ed una sola retta, e due rette distinte di $\mathbb{P}^2$ si incontrano in uno ed un solo punto. Notiamo che l'applicazione π non può essere estesa in modo continuo ad una applicazione su tutto $\mathbb{P}^2$.
Infatti sia R una retta passante per O, sia $y = L \cap R$ e sia $\{x_i\}_{i \in I}$ (dove I è un insieme di indici) una successione di punti appartenenti ad R e tendenti ad O, allora abbiamo che $\pi(x_i) = y$ per ogni $i \in I$. Per continuità si dovrebbe avere che $\pi(O) = y$. Ripetendo lo stesso ragionamento per una retta $R' \neq R$ si dovrebbe assumere $\pi(O) = y'$ dove con y' indichiamo il punto di intersezione di L con R'. Per risolvere il nostro problema ed estendere la funzione ad una applicazione definita ovunque, si generalizza allargando lo spazio dei dati iniziali che non sarà più $\mathbb{P}^2$, bensì qualcosa di più grande.

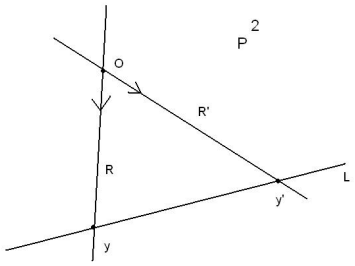


Figura 1.1: Proiezione dal punto O sulla retta L

1.2 Lo spazio totale dello scoppiamento

Come abbiamo visto il problema sorge in quanto riscontriamo che ci sono diversi modi, o meglio direzioni di tendere al punto O. Dunque il problema é di natura infinitesimale del primo ordine: cioé presa una curva C regolare in O e una successione di punti $\{x_n\} \subset C$ che tendono a O, vediamo che le rette $< O, x_n >$ tendono alla retta tangente in O alla curva e dunque ció che conta é appunto la tangente.

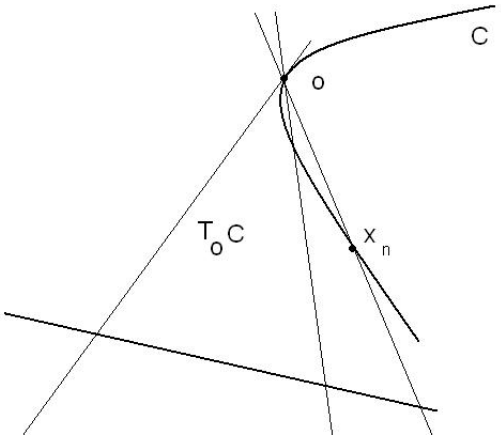


Figura 1.2: Direzioni tangenti

Aggiungiamo quindi a $\mathbb{P}^2$ le direzioni tangenti in O in modo tale che l'applicazione π sia definita ovunque.
Procediamo nel modo seguente:

Definiamo $\hat{\mathbb{P}} := \{(x,t) \in \mathbb{P}^2 \times L | x \in < O, t >\}$.
(Con $< O, t >$ intendiamo la retta passante per O e per t).

A questo punto viene naturale definire due applicazioni p e q, nel modo seguente:

$$p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2 : (x,t) \longmapsto x$$
$$q : \hat{\mathbb{P}} \to L : (x,t) \longmapsto t$$

Struttura di $\hat{\mathbb{P}}$ le mappe p e q.

Proposizione 1. *L'applicazione p induce una biiezione tra* $\hat{\mathbb{P}} \backslash p^{-1}(O)$ *e* $\mathbb{P}^2 \backslash \{O\}$.

Dimostrazione:
Per definizione $\hat{\mathbb{P}} \setminus p^{-1}(O) = \{(x,t) | x \neq O\}$. Ció significa che il punto x determina univocamente il punto t in quanto $t =< O, x >$, quindi $\hat{\mathbb{P}} \setminus p^{-1}(O) \to \mathbb{P}^2 \setminus \{O\} : (x,t) \to x$ é una biiezione. □

Osservazione 1. *In questo modo abbiamo appena dimostrato che* $\hat{\mathbb{P}}$ *é birazionalmente equivalente a* $\mathbb{P}^2$*, ovvero é una varietá razionale.*

Andiamo quindi a capire cosa succede nel punto O. Notiamo che $p^{-1}(O) = \{(O,t) | t \in L\} \cong L \cong \mathbb{P}^1$. In altri termini possiamo dire che $p^{-1}(O)$ rappresenta il fascio di rette passanti per O e dunque rappresenta tutte le direzioni tangenti che si possono assumere in O.

In conclusione poiché $\hat{\mathbb{P}} = \hat{\mathbb{P}} \setminus p^{-1}(O) \cup p^{-1}(O)$, lo possiamo considerare come una "modificazione " di $\mathbb{P}^2$ dove al di fuori di O viene lasciato tutto come prima, mentre "al posto" di O mettiamo un $\mathbb{P}^1$ che rappresenta tutte le direzioni tangenti in O.

Definizione 1. *Con le notazioni precedenti la mappa* $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ *viene chiamata* ***scoppiamento*** *del punto* O *in* $\mathbb{P}^2$.

Definizione 2. *Con le notazioni precedenti* $p^{-1}(O)$ *é detto* ***divisore eccezionale*** *dello scoppiamento e lo indicheremo con* E.

Osservazione 2. *Notiamo che* $\hat{\mathbb{P}}$ *é una varietá algebrica perché é definita mediante costruzioni algebrico geometriche e* $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ *é un morfismo. Inoltre, dimostreremo piú avanti, che* $\hat{\mathbb{P}}$ *é una varietá non singolare, quindi una superficie algebrica liscia. Abbiamo* $p^{-1}(O) \cong \mathbb{P}^1$*, quindi* $E = p^{-1}(O)$ *é una curva razionale liscia contenuta in* $\hat{\mathbb{P}}$*. I punti di E rappresentano le direzioni tangenti di* $\mathbb{P}^2$ *in O. Nella terminologia classica, i punti di E rappresenteno il primo intorno infinitesimale del punto O. Il morfismo p contrae la curva E in un punto O, che é un punto liscio di* $\mathbb{P}^2$*. Questo é un fenomeno abbastanza particolare in quanto contraendo una curva non otteniamo alcuna singolaritá.*

Andiamo ora a vedere piú nel particolare cosa fa la mappa q. Per come é stata definita la mappa q non é altro che l'estensione della mappa π. Infatti sia $\xi = (x, t) \in \hat{\mathbb{P}}$. Se $x \neq O, \xi$ si identifica con il punto $x \in \mathbb{P}^2 \setminus \{O\}$ e per questo si ha che $q(\xi) = t = \pi(x)$. Se invece $x = O, \xi$ si identifica con una retta per O e piú precisamente con la retta che interseca L in t, che é dunque una direzione tangente in O.

1.3 Descrizione analitica.

In questa sezione cercheremo di individuare quali sono le equazioni che rappresentano lo scoppiamento di un punto di $\mathbb{P}^2$. Supponiamo di proiettare dal punto $O = (0 : 0 : 1)$ sulla retta L di equazione $x_1 = x_2$. Passando alla carta affine $x_2 \neq 0$, ció significa proiettare dal punto $(0, 0)$ sulla retta L di equazione $x_1 = 1$. Sia P un punto dello spazio affine di coordinate $P = (a, b)$. Se $P \neq O$ la retta $< O, P >$ ha equazione $bx_0 = ax_1$ ed interseca L nel punto $(a/b, 1)$ (stiamo assumendo $b \neq 0$, poiché se b fosse uguale a 0 la retta $< O, P >$ nello spazio affine risulterebbe parallela a L, dunque per ora escludiamo questo caso). Tale punto corrisponde nel proiettivo al punto $(a/b : 1 : 1)$ di L. I punti di L sono della forma $(y_0 : y_1 : y_1)$ e possiamo pensarli come punti di $\mathbb{P}^1 \cong L$ di coordinate $(y_1 : y_2)$. Quindi il punto $P = (a : b : 1)$ viene proiettato nel punto $(a/b : 1)$. In altri termini possiamo dire che tutti i punti ξ della forma,

$$\xi = ((a : b : 1), (a/b : 1)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

ovvero tali che $x_0y_1 = x_1y_0$ appartengono a $\hat{\mathbb{P}}$. Se invece $b = 0$, allora la retta che passa per $P = (a, 0)$ e $O = (0, 0)$ é della forma $x_1 = 0$. Passando nel proiettivo le rette $x_1 = x_2, x_1 = 0$ si intersecano nel punto $(1 : 0 : 0)$, quindi anche i punti della forma $\xi = ((a : 0 : 1), (1 : 0)) \in \hat{\mathbb{P}}$ e soddisfano l'equazione $x_0y_1 = x_1y_0$.
Inoltre non é difficile verificare che se $\xi = ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1]) \in \hat{\mathbb{P}}$ allora ξ verificherá l'equazione $x_0y_1 = x_1y_0$.
Infatti sia $\xi = ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1])$ tale che $x_0y_1 = x_1y_0$;
se $[x_0 : x_1 : x_2] = [0 : 0 : 1]$ allora l'equazione é sempre verificata.
Se invece $x := [x_0 : x_1 : x_2] \neq [0 : 0 : 1]$ allora so che il punto $[y_0 : y_1 : y_1]$ appartiene alla retta $< O, x >:= Xx_1 = Yx_0$ (dove con $[X : Y : Z]$ indichiamo le coordinate omogenee di $\mathbb{P}$) e dunque anche in questo caso ξ verifica $x_0y_1 = x_1y_0$.

Osservazione 3. *Le considerazioni precedenti mostrano che lo scoppiamento é un problema locale. In particolare prendendo una carta affine di $\mathbb{P}^2$ possiamo*

considerare lo scoppiamento di un punto di $\mathbb{A}^2$*. In questo caso avremo che* $\hat{\mathbb{A}}$ *é una sottovarietá di* $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ *definita da* $xv = yu$ *dove* (x, y) *sono le coordinate affini, mentre* $[u : v]$ *sono quelle proiettive.*

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 2. *La superficie* $\hat{\mathbb{P}}$ *é una varietá liscia, irriducibile di dimensione* 2*.*

Dimostrazione:
Abbiamo $\hat{\mathbb{P}} = \{(x, t) \in \mathbb{P}^2 \times L | x \in < O, t >\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times L \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$
$\hat{\mathbb{P}}$ è la sottovarietá algebrica di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ definita dall'equazione $x_0y_1 = x_1y_0$.
Poiché la varietá $\hat{\mathbb{P}}$ é birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2$, allora ha dimensione due, e poiché $\hat{\mathbb{P}} \setminus p^{-1}(O) \cong \mathbb{P}^2 \setminus O$ allora al di fuori del divisore eccezionale é una varietá non singolare.

Vogliamo capire quindi, se la varietá si mantiene liscia anche sul divisore eccezionale. Dal momento che lo scoppiamento é un problema locale, possiamo fare le nostre considerazioni in un intorno del divisore eccezionale.
Quello che vogliamo fare, é prendere un intorno di un punto sul divisore eccezionale e tramite delle carte affini, renderlo isomorfo ad una varietá liscia di $\mathbb{A}^3$. Se questo risulta possibile per ogni punto di E allora siamo riusciti a dimostrare che $\hat{\mathbb{P}}$ é liscia.
Tutti i punti che appartengono al divisore eccezionale sono della forma $\xi = ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1])$ tali che $x_2 \neq 0$.
Indichiamo ora con

$$U := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_2 \neq 0\}$$

e con

$$V := \{[y_0 : y_1] \in \mathbb{P}^1 | y_0 \neq 0\}$$

Abbiamo che $U \times V$ é una carta affine di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ e tutti i punti di $U \times V$ sono della forma $([x_0 : x_1 : 1], [1 : y_1])$. Indichiamo con $V' := (U \times V) \cap \hat{\mathbb{P}}$, (chiaramente V' é diverso dal vuoto) e definiamo l'applicazione

$$\varphi : V' \to \mathbb{A}^3$$
$$([x_0 : x_1 : 1], [1 : y_1]) \to (x_0, x_1, y_1)$$

Ricordiamo che $\hat{\mathbb{P}}$ é definita dall'equazione $x_0y_1 = x_1y_0$, ma $y_0 = 1$ quindi in $U \times V$ diventa $x_1 = x_0y_1$, perció $\varphi(V') = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 | y = xz\}$ che é una varietá liscia di $\mathbb{A}^3$.

Dimostriamo ora che φ é anche un isomorfismo sull'immagine.
Troviamo l'inversa di φ.
Sia

$$\eta : \varphi(V') \to V'$$
$$(x, y, z) \to ([x : y : 1], [1 : z])$$

allora abbiamo che
$\eta \circ \varphi([x_0 : x_1 : 1], [1 : y_1]) = \eta((x_0, x_1, y_1)) = ([x_0 : x_1 : 1], [1 : y_1])$ e
$\varphi \circ \eta(x, y, z) = \varphi([x : y : 1], [1 : z]) = (x, y, z)$
Quindi $\eta \circ \varphi = Id_{V'}$ e $\varphi \circ \eta = Id_{\varphi(V')}$ perció φ é isomorfismo sull'immagine.
Sia $W := \{[y_0 : y_1] \in \mathbb{P}^1 | y_1 \neq 0\}$, allora tramite applicazioni analoghe riusciamo a dimostrare che $W' := (U \times W) \cap \hat{\mathbb{P}}$ é isomorfo ad una varietá liscia di $\mathbb{A}^3$. Dal momento che E viene completamente ricoperto da $V' \cup W'$ ció significa che per ogni punto di E é possibile trovare un intorno isomorfo ad una varietá liscia di $\mathbb{A}^3$, come volevasi dimostrare. □

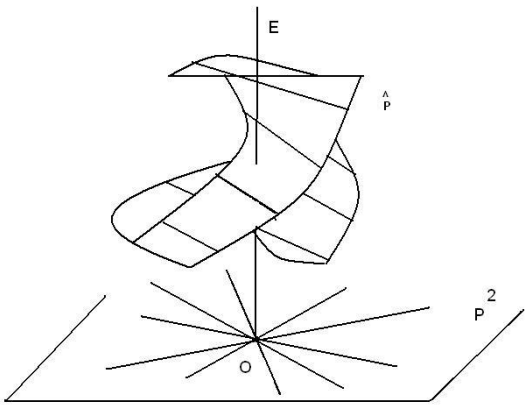


Figura 1.3: Superficie dello scoppiamento

Osservazione 4. *La superficie $\hat{\mathbb{P}}$ non é isomorfa a $\mathbb{P}^2$.*

Dimostrazione:
Notiamo innanzi tutto che l'applicazione $q : \hat{\mathbb{P}} \to L$ conferisce a $\hat{\mathbb{P}}$ una struttura di superficie rigata, in quanto prendendo $t \in L$ si ha che
$q^{-1}(t) = \{(x, t) | x \in < O, t >\} \cong \mathbb{P}^1$ é una curva che indicheremo con R_t. Poiché $q^{-1}(L) = \hat{\mathbb{P}}$ allora posso scrivere $\hat{\mathbb{P}} = \bigcup_{t \in L} R_t$ e questo mi dice che $\hat{\mathbb{P}}$ é una superficie rigata.
$q^{-1}(t)$ é dunque una curva e per come é stata definita q ho che se $t_1, t_2 \in L$ con

$t_1 \neq t_2$ allora $R_{t_1} \cap R_{t_2} = \varnothing$, ma in $\mathbb{P}^2$ 2 curve si intersecano sempre in almeno un punto, quindi non ci puó essere un isomorfismo tra $\hat{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{P}^2$. □

Tutto ció che é stato fatto in questo capitolo per un punto di $\mathbb{P}^2$ lo si puó estendere anche per un punto di $\mathbb{P}^n$. Tramite passaggi e risultati analoghi siamo in grado di descrivere lo scoppiamento di un punto di $\mathbb{P}^n$.

1.4 Applicazioni immediate.

Andiamo ora a vedere un'applicazione diretta e l'utilitá di quanto abbiamo fatto finora, ovvero a cosa serve uno scoppiamento.
Analizziamo, in generale, cosa succede da un punto di vista analitico. Sia $f(x,y) = f_r(x,y) + ... + f_n(x,y)$ l'equazione della curva irriducibile $C \in \mathbb{A}^2$. Con $f_m(x,y)$ intendiamo il polinomio omogeneo di grado m. E' evidente che tale curva ammette una singolaritá di molteplicitá r sull'origine O. Sia $\hat{\mathbb{A}}$ lo scoppiamento di $\mathbb{A}^2$ nell'origine O. Abbiamo $\mathbb{A} = \{((x,y),(u:v))|xv = yu\}$. Consideriamo la carta affine su $\mathbb{P}^1$ $u \neq 0$. In questa carta $p^{-1}(C)$ é data da $\{f(x,y) = 0, y = xv\}$, cioé da $f(x,xv) = 0$ otteniamo dunque
$f(x,xv) = x^r[f_r(1,v) + ... + x^{n-r}f_n(1,v)] = 0$. Vediamo che quest'ultima é composta da due componenti. La prima é data da $\{x^r = 0, y = 0\}$, la seconda componente é invece data da $\{f_r(1,v) + ... + f_n(1,v) = 0, y = xv\}$ e corrisponde alla curva che solitamente indicata con $\tilde{C}$, ovvero la trasformata stretta di C; é lecito dunque indicare come preimmagine di C attraverso lo scoppiamento: $p^*(C) = rE + \tilde{C}$ in quanto le equazioni del divisore eccezionale, E, sono $\{x = 0, y = 0\}$.

Esempi delle curve piú note.

1) **La cubica nodale.**
Sia $C \in \mathbb{A}^2$ la cubica di equazione $y^2 = x^2(x+1)$, ovvero la cubica di equazione $y^2z = x^3 + x^2z$ in $\mathbb{P}^2$. Tale cubica é una curva irriducibile con un nodo nell'origine. Allora scoppiando l'origine e guardando nella carta $u \neq 0$, $p^{-1}(C)$ é dato da $\{y^2 = x^2(x+1), y = xv\}$ (abbiamo posto $u = 1$).
Sostituendo otteniamo $\{(a)x^2(v^2 - x - 1) = 0, (b)y = xv\}$. L'equazione (a) é costituita da due componenti nelle coordinate (x,y,v) di $\mathbb{A}^3$. La prima é data da $\{x^2 = 0, y = 0\}$ ed é dunque quell'equazione che ci permette di dire che E é contato con molteplicitá due in $p^{-1}(C)$. L'altra componente é data da $\{v^2 - x - 1 = 0, y = xv\}$ ed é quella che abbiamo indicato con $\tilde{C}$. Questa componente interseca il divisore eccezionale nei punti dati da $v^2 = 1$, cioé $v = 1, -1$

che corrispondono alle tangenti principali di C nel punto O.

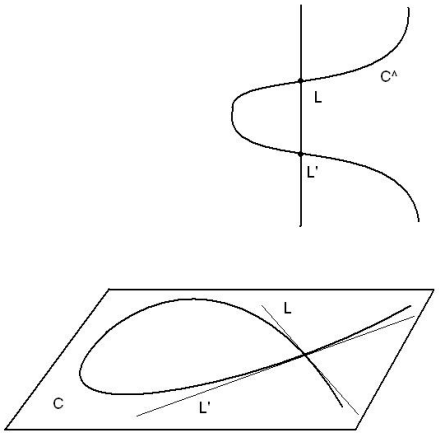


Figura 1.4: Cubica nodale

2) **La cuspide.**

Sia $C \in \mathbb{P}^2$ la cubica di equazione $zy^2 - x^3 = 0$, ovvero la cubica di equazione $y^2 - x^3 = 0$ in $\mathbb{A}^2$ tramite la carta locale $z \neq 0$. Non é difficile dimostrare che il suo unico punto di singolaritá é in $[0:0:1]$, con molteplicitá 2.

Passiamo a considerare la curva tramite la carta locale $z \neq 0$, otteniamo cosí la cubica di equazione $y^2 - x^3 = 0$ in $\mathbb{A}^2$ che é una curva irriducibile con una singolaitá nell'origine O. Scoppiando allora l'origine, e guardando nella carta $u \neq 0$, $p^{-1}(C)$ é data da $\{y^2 = x^3, y = xv\}$, sostituendo otteniamo $\{(a)x^2(v^2 - x) = 0, (b)y = xv\}$. L'equazione (a) é costituita da due componenti nelle coordinate (x, y, v) di $\mathbb{A}^3$. La prima é data da $\{x^2 = 0, y = 0\}$ ed é dunque quell'equazione che ci permette di dire che E é contato con molteplicitá due in $p^{-1}(C)$. L'altra componente é data da $\{v^2 - x = 0, y = xv\}$ ed é quella che abbiamo indicato con $\tilde{C}$. Andiamo a calcolare la matrice Jacobiama per trovare eventuali punti singolari:

$$\mathcal{J}_{(x,y,u)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2v \\ -v & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Notiamo che esiste sempre un minore 2×2 con determinante non nullo; quindi la marice ha rango massimo ovvero non esistono punti singolari. $\tilde{C}$ interseca E nel punto $v = 0$ contato con molteplicitá due. Abbiamo quindi che il divisore eccezionale é tangente a $\tilde{C}$, in quanto $\tilde{C}$ é una curva liscia, e la loro molteplicitá di intersezione in O é due.

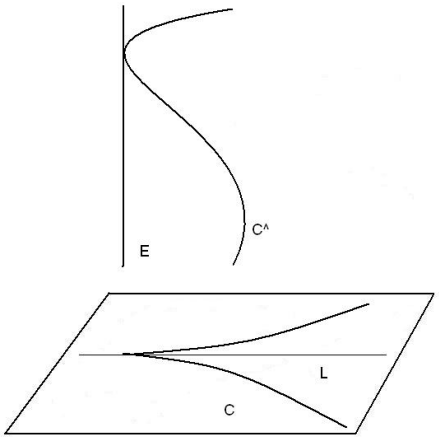


Figura 1.5: Cuspide

3) **Il tacnodo**

Sia $C \in \mathbb{P}^2$ la curva di equazione $zx^2 - x^4 - y^4 = 0$, ovvero la curva di equazione $x^2 - x^4 - y^4 = 0$ in $\mathbb{A}^2$ tramite la carta locale $z \neq 0$. Non é difficile dimostrare che il suo unico punto di singolaritá é in $[0:0:1]$, con molteplicitá 2.
Passiamo a considerare la curva tramite la carta locale $z \neq 0$, otteniamo cosí la curva di equazione $x^2 - x^4 - y^4 = 0$ in $\mathbb{A}^2$ che é una curva irriducibile con una singolaitá nell'origine O. Scoppiando allora l'origine, e guardando nella carta $v \neq 0$, $p^{-1}(C)$ é data da $\{y^4 = x^2 - x^4, x = yu\}$, sostituendo otteniamo $\{(a)y^2(y^2 - u^2 + y^2u^4) = 0, (b)x = yu\}$. L'equazione (a) é costituita da due componenti nelle coordinate (x, y, v) di $\mathbb{A}^3$. La prima é data da $\{y^2 = 0, x = 0\}$ ed é dunque quell'equazione che ci permette di dire che E é contato con molteplicitá due in $p^{-1}(C)$. L'altra componente é data da $\{y^2 - u^2 + y^2u^4 = 0, x = yu\}$ ed é quella che abbiamo indicato con $\tilde{C}$ e interseca E nel punto $u = 0$ contato con molteplicitá due. Dalle equazioni di $\tilde{C}$: $\{y^2 - u^2 + y^2u^4 = 0, x - yu = 0\}$ ricaviamo la matrice Jacobiana per trovare eventuali punti singolari:

$$\mathcal{J}_{(x,y,u)} = \begin{pmatrix} 0 & 2y + 2yu^4 & 4u^3y^2 - 2u \\ 1 & -u & -y \end{pmatrix}$$

Affinché non ci siano punti singolari dovrei avere rango massimo, ovvero dovrei avere almeno un minore 2×2 della matrice che non si annulla per ogni valore di y e u. Ma notiamo che se $y = u = 0$ abbiamo l'annullarsi di ogni minore 2×2. Questo ci dice che la curva $\tilde{C}$ ammette un punto singolare in $y = u = 0$.

Se $y = 0$, allora anche $x = 0$ e dunque il punto singolare $x = y = u = 0$ si trova proprio sul divisore eccezionale. In questo caso lo scoppiamento non ha risolto la singolaritá ne ha fatto abbassare la molteplicitá che rimane sempre due.

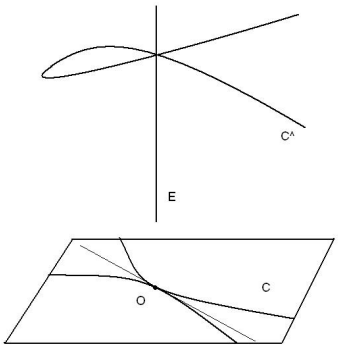


Figura 1.6: Tacnodo

Capitolo 2

Risoluzioni delle singolaritá delle curve piane

2.1 Scoppiamenti e risoluzioni delle singolaritá

Sia C una curva piana irriducibile e ridotta, con singolaritá.

Definizione 3. *Risolvere le singolaritá di C significa trovare una curva liscia X e un morfismo birazionale $f : X \to C$. Si dirá che X é un* ***modello liscio*** *di C e che $f : X \to C$ é una* ***risoluzione delle singolaritá*** *di C.*

E' facile intuire che la nozione di scoppiamento é lo strumento base per la risoluzione delle singolaritá di una curva piana.

Esempio

Sia C una cubica piana con un nodo in O e le cui tangenti principali siano L e L'.

Sia $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ lo scoppiamento del punto O. Si ricorda che $E = p^{-1}(O) \cong \mathbb{P}^1$ corrisponde alle direzioni tangenti nel punto O, e che $p : \hat{\mathbb{P}} \setminus E \to \mathbb{P}^2 \setminus O$ é un isomorfismo. In particolare $p^{-1}(C \setminus O) \to C \setminus O$ é un isomorfimo.

Definizione 4. *La curva $\tilde{C} \subset \hat{\mathbb{P}}, \tilde{C} := \overline{p^{-1}(C \setminus O)}$ (chiusura topologica) si dice* ***trasmormata stretta*** *di C.*

E' chiaro che $p^{-1}(C)$ contiene E, in quanto $O \in C$ e $p^{-1}(O) = E$. Peró intuitivamente, si potrebbe dire che $p^{-1}(C)$ contiene due volte E, perché O é un punto doppio di C. Quindi se indichiamo con $p^*(C)$ la controimmagine algebrica di C ovvero quella contata con molteplicitá abbiamo che $p^*(C) = \tilde{C} + 2E$ (tutto ció é stato reso piú rigoroso nella sessione precedente, quando siamo andati a considerare le equazioni).

Osservazione 5. *Data C una cubica piana con un nodo in O, allora la curva $\tilde{C}$ interseca il divisore eccezionale in 2 soli punti, corrispondenti alle tangenti principali L e L'.*

Siccome $p : \hat{\mathbb{P}} \setminus E \to \mathbb{P}^2 \setminus \{O\}$ é isomorfismo allora l'applicazione $p : \tilde{C} \to C$ é birazionale. La curva $\tilde{C}$ é liscia in quanto le intersezioni con il divisore eccezionale sono semplici. $p : \tilde{C} \to C$ é quindi una risoluzione delle singolaritá per C. (Lo scoppiamento ha sciolto le singolaritá).

Non sempre le singolaritá si risolvono cosí velocemente, infatti se siamo in presenza di una curva C con un tacnodo in O, la questione diventa piú complicata in quanto ammette una tangente principale doppia in O. Sia L^2 la tangente principale doppia nel punto O, allora quando scoppiamo il punto O otteniamo che $\tilde{C}$ intersecherá il divisore eccezionale in L non in modo semplice, bensí con molteplicitá due, questo puó significare due cose: o che E é tangente a $\tilde{C}$ in L oppure L é un punto di molteplicitá due per $\tilde{C}$. Nell'esempio fatto precedentemente abbiamo visto che in realtá L risulterá essere un punto singolare per $\tilde{C}$ che quindi risulta essere nuovamente una curva singolare in L, per sciogliere definitivamente questa singolaritá bisognerá scoppiare ulteriormente.

2.2 Trasformazioni quadratiche

Da quanto visto sinora, si deduce che si dovrebbe riuscire a risolvere le singolaritá di una curva piana C con una serie di scoppiamenti, ottenendo cosí un modello liscio X di C. Il problema di questo procedimento é che X puó risultare non essere piú una curva piana. Per ovviare a ció si introduce la nozione di *trasformazione quadratica*.

Una trasformazione quadratica é una particolare equazione birazionale, $f : \mathbb{P}^2 - - - > \mathbb{P}^2$ tale che se $C \in \mathbb{P}^2$, allora dopo opportune scelte, $f(C) \subset \mathbb{P}^2$ sará una curva piana, birazionale a C, con singolaritá piú semplici di quelle di C. La nozione di trasformazione quadratica é strettamente legata a quella di scoppiamento e si puó dimostrare che:

Teorema 1. *Ogni curva piana irriducibile puó essere trasformata con una serie finita di trasformazioni quadratiche, in una curva piana con singolaritá eliminabili, dove per singolaritá eliminabili intendiamo singolaritá ordinarie.*

Dimostrazione:
Vedi paragrafo 2.3

Descriviamo analiticamente il problema.
Siano $a_2 = (0:0:1), a_1 = (0:1:0), a_0 = (1:0:0)$, inoltre denotiamo con L_i la retta per a_j, a_k con $(\{i,j,k\} = \{0,1,2\})$.

Definizione 5. *I punti a_i sono i **punti fondamentali** della traformazione e le rette L_i sono chiamate le **rette eccezionali**.*

Sia $Q : \mathbb{P}^2 \setminus \{a_0, a_1, a_2\} \to \mathbb{P}^2 : (x:y:z) \longmapsto (yz:xz:xy)$. Si ha che Q é una trasformazione quadratica.
L'applicazione é ben definita in quanto se $p \in \mathbb{P}^2 \setminus \{a_0, a_1, a_2\}$, allora p ammette due coordinate non nulle e quindi almeno uno dei tre prodotti sará diverso da zero. Sia $U := \mathbb{P}^2 \setminus \bigcup L_i$. Se $p \in U$, allora $xyz \neq 0$ e abbiamo:
$Q(Q(p)) = Q(yz:xz:xy) = (x^2yz : xy^2z : xyz^2)$. Dividendo per xyz otteniamo che $Q(Q(p)) = p$. Pertanto $Q : U \to U$ é un isomorfismo e $Q = Q^{-1}$. Questo mostra che $Q : \mathbb{P}^2 - - - > \mathbb{P}^2$ é birazionale.
L'immagine di Q é $U \cup \{a_0, a_1, a_2\}$. Infatti se $p = (0:b:c) \in L_0$, $p \neq a_1, a_2$ (cioé $bc \neq 0$), $Q(p) = (bc:0:0)$ e quindi con un abuso di scrittura possiamo scrivere $Q(L_i) = a_i$ ed é questo il motivo per cui le rette L_i sono chiamate rette eccezionali.

Definizione 6. *Con le notazioni precedenti l'applicazione Q viene chiamata **trasformazione quadratica** di $\mathbb{P}^2$ con punti fondamentali a_i.*

Sia ora C una curva irriducibile di $\mathbb{P}^2$ di grado d e di equazione $F(x,y,z) = 0$. Si assume che C non sia una delle rette eccezionali L_i. Con le stesse notazioni di prima abbiamo che $Q^{-1}(C \cap U) = Q(C \cap U)$

Definizione 7. *Indichiamo con C' la chiusura di $Q^{-1}(C \cap U)$. La curva C' é detta **trasformata stretta** di C nella trasformazione quadratica Q.*

Osservazione 6. *La curva C' é birazionale a C.*

Dimostrazione
Notiamo innanzi tutto che $C \cap U$ é un aperto di C. Infatti $C \cap U$ é uguale a C meno un numero finito di punti in quanto, $C \cap L_i$ corrispondono a d punti contati con molteplicitá.
Allora abbiamo che $Q : Q^{-1}(C \cap U) \to C \cap U$ é un isomorfismo e dunque C' é birazionale a C. □

Proposizione 3. *Sia $F^Q(x,y,z) = F(yz,xz,xy)$ (chiaramente $deg(F^Q) = 2d$). Se $m_{a_2}(C) = r$ allora z^r é la piú grande potenza di z che divide F^Q. In generale se $m_{a_i} = r_i$, allora $F^Q = x^{r_0}y^{r_1}z^{r_2}F'(x,y,z)$ e x,y,z non dividono F'.*

Dimostrazione:
Sappiamo che $m_{a_2}(C) = r$ con $a_2 = [0 : 0 : 1]$, deomogenizzando rispetto z ottengo che $F(x, y, z)$ diventa $f(x, y)$. Chiamiamo $\bar{C}$ la curva di equazione $f(x, y) = 0$. Abbiamo che che $m_0(\bar{C}) = r$, dunque é possibile scrivere f nella forma: $f(x, y) = f_r(x, y) + ... + f_d(x, y)$ dove gli $f_t(x, y)$ sono polimnomi omogenei di grado t e con $f_r(x, y) \neq 0$. Riomogenizzando posso scrivere
$F(x, y, z) = z^{d-r} f_r(x, y) + ... + f_d(x, y)$.
$F^Q(x, y, z) = F(yz, xz, xy) = (xy)^{d-r} f_r(yz, xz) + ... + f_d(yz, xz)$. Ora $f_r(x, y) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x^{r-i} y^i$ quindi
$f_r(yz, xz) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (yz)^{r-i} (xz)^i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i z^r y^{r-i} x^i = z^r \sum_{i=1}^{r} \alpha_i y^{r-i} x^i$.
Otteniamo cosí che $F^Q(x, y, z) = z^r[(xy)^{d-r} f_r(y, x) + ... + z^{d-r} f_d(y, x)]$, ovvero z^r divide $F^Q(x, y, z)$. Inoltre z^r é la massima potenza di z che divide F^Q in quanto $f_r(x, y) \neq 0$ e non é divisibile per z. Se ora $m_{a_i} = r_i$, ripetendo lo stesso ragionamento per la x e la y otteniamo che $F^Q(x, y, z) = z^{r_2} F_z(x, y)$;
$F^Q(x, y, z) = x^{r_0} F_x(y, z)$ e $F^Q(x, y, z) = y^{r_1} F_y(x, z)$, dove F_x, F_y e F_z sono opportuni polinomi. Quindi $x^{r_0} y^{r_1} z^{r_2}$ divide $F^Q(x, y, z)$, ció implica
$F^Q(x, y, z) = x^{r_0} y^{r_1} z^{r_2} F'(x, y, z)$ e poiché x^{r_0} é la piú alta potenza di x che divide F^Q x non puó dividere F'. Idem per le altre variabili. □

Osservazione 7. *L'equazione $F'(x, y, z)$ individua l'equazione della curva C'.*

2.3 Trasformazioni quadratiche e scoppiamenti

In questa sezione vogliamo creare un collegamento tra le trasformazioni quadratiche e gli scoppiamenti su $\mathbb{P}^2$.

Torniamo a considerare la traformazione quadratica
$Q : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 : (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ da un punto di vista piú geometrico. Sia δ il sistema linerare delle coniche che passano per i punti $a_0 = (1 : 0 : 0), a_1 = (0 : 1 : 0), a_2 = (0 : 0 : 1)$. E' chiaro che il luogo base di δ é proprio $\{a_0, a_1, a_2\}$ e che una base di δ é del tipo (x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1). Infatti tutte le coniche passanti per a_i devono avere necessariamente i coefficenti dei termini di secondo grado nulli, ovvero sono una combinazione lineare di x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1 dunque δ é un sistema lineare di dimensione due. Pertanto Q non é altro che la mappa razionale associata al sistema lineare δ. Andiamo a scoppiare il luogo base di δ. Poiché lo scoppiamento é una questione locale, possiamo scoppiare i punti a_i uno dopo l'altro ed ottenere una varietá liscia, irriducibile, ancora denotata $\hat{\mathbb{P}}$ e un morfismo $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ tale che $p_{|\hat{\mathbb{P}} \setminus (\bigcup E_i)} \hat{\mathbb{P}} \setminus (\bigcup E_i) \to \mathbb{P}^2 \setminus (\bigcup a_i)$ sia un isomorfismo; dove con E_i indichiamo il divisore eccezionale $p^{-1}(a_i)$.

Indichiamo con L_i la retta passante per i punti distinti a_j, a_k con $j, k \neq i$ e con $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$; nello scoppiamento $\hat{\mathbb{P}}$ abbiamo le seguenti curve: i divisori eccezionali E_i e le trasformate strette $\tilde{L}_i$ delle rette L_i con $0 \leq i \leq 2$. Le posizioni reciproche di queste curve sono le seguenti: la retta L_0 passa per i punti a_1, a_2 e non passa per il punto a_0, dunque la sua trasformata stretta $\tilde{L}_0$ toccherá i divisori eccezionali E_1, E_2 in un punto mentre avrá intersezione vuota con E_0. Analogalmente per L_1, L_2, come illustrato nella figura qui sotto:

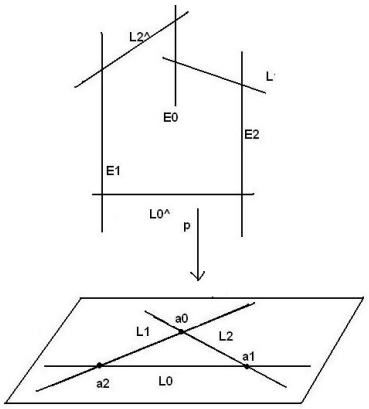


Figura 2.1: Scoppiamento di tre punti

Si presenta ora un problema: l'applicazione Q, non é definita in tutto $\mathbb{P}^2$, in quanto δ ammette tre punti base. Per ovviare a ció, estendiamo il dominio in modo tale da avere un sistema lineare privo di punti base.

Lemma 1. *Il sistema lineare* $\Delta = p^*\delta - \sum E_i$ *é senza punti base.*

Dimostrazione:
Questo é chiaro al di fuori da $\bigcup E_i$, in quanto si comporta esattamente come δ al di fuori dei punti base. Per vederlo su $\bigcup E_i$ basta verificare che non tutte le coniche di δ hanno la stessa direzione tangente in a_i per ogni $0 \leq i \leq 2$. Consideriamo, ad esempio, tutte le coniche passanti per a_0 del tipo $L_0 L$ dove L é una retta per a_0, queste per come sono state definite hanno sicuramente direzioni tangenti differenti in a_0; analogamente si puó vedere per a_1, a_2. □

Pertanto Δ definisce un morfismo $g : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ tale che $g = Q$ e dunque é lecito scrivere $Q = g \circ p^{-1}$.

Per studiare l'applicazione Q, é dunque necessario capire a fondo chi é e cosa fa il morfismo g.

Notiamo innanzi tutto che g é un isomorfismo al di fuori dell'unione delle $\tilde{L}_i$, in quanto Q é un isomorfismo in $\mathbb{P}^2 \setminus (\bigcup L_i)$.

Osservazione 8. *Il morfismo g non é iniettivo (cioé Δ non separa i punti), in particolare si ha che g contrae la curve $\tilde{L}_i$.*

Dimostrazione:
Sia $x \in L_i$ un punto generico e sia δ_x l'insieme delle coniche di δ passanti per x. E' chiaro che $\delta_x = \{L_i L\}$ dove L é una retta per a_i; ció significa che l'iperpiano δ_x di δ non dipende dalla scelta del punto $x \in L_i$ e quindi tutti i punti $x \in L_i$ hanno la stessa immagine. (Vedi paragrafo 3.1 descrizione del morfismo "senza coordinate"). □

Indicheremo con $l_i := g(\tilde{L}_i)$

Andiamo ad analizzare chi sono le immagini dei divisori eccezionali attraverso la mappa g.

Osservazione 9. *I divisori eccezionali E_i hanno come immagini delle rette, e indicheremo: $g(E_i) := A_i$.*

Dimostrazione:
Il grado di $g(E_i)$ é uno in quanto presa una curva generica $\tilde{C}$ di Δ, questa interseca il divisore eccezionale solo in un punto. Quindi A_i é una retta. □

Notiamo inoltre che entrambe le rette L_j, L_k intersecano il divisore eccezionale E_i in un punto, (i,j,k diversi tra loro e $0 \leq i, j, k \leq 2$). Pertanto A_i passa per i punti $g(L_j \cap E_i)$ cioé A_i passa per i punti l_j, l_k.

Riassumendo abbiamo che:
- g é un isomorfismo al di fuori dell'unione delle $\tilde{L}_i$;
- g contrae le rette $\tilde{L}_i$ nei punti l_i in modo tale che le rette $\tilde{L}_i$ rappresentino le direzioni tangenti di l_i;
- le immagini dei divisori eccezionali non sono altro che le rette passanti per due dei tre punti l_i.

Da queste osservazioni si nota una situazione completamente simmetrica rispetto alla situazione creata dal morfismo p; possiamo affermare che g non é altro che lo scoppiamento nei punti l_i con divisori eccezionali $\tilde{L}_i$ e con E_i trasformate strette delle rette A_i.

Andiamo adesso a vedere se quanto visto finora ci servirá nella risoluzione delle singolaritá di una curva.

Sia C una curva di grado d con un punto di molteplicitá r in a_0.
Si assumerá inoltre:
(a) l'unico punto fondamentale su C é a_0 e nessuna delle rette L_i é una tangente principale a C in a_0;

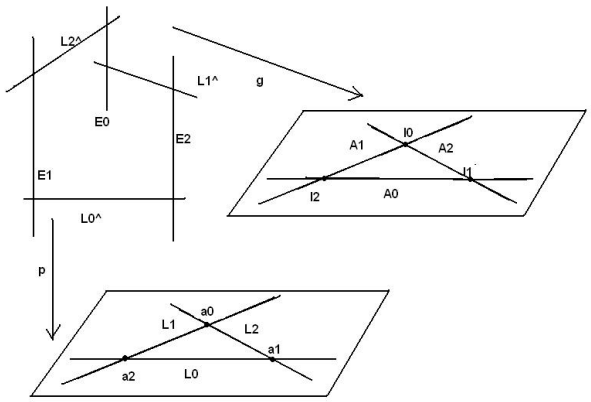


Figura 2.2: Simmetria della trasformazione quadratica

(b) L_0 interseca trasversalmente C, in d punti distinti (nessuno dei quali é fondamentale);
(c) fuori da a_0, L_1 e L_2 intersecano C trasversalmente in $d-r$ punti (tutti distinti e nessuno dei quali fondamentale). Sia $C' \subset \mathbb{P}^2$ la curva $g(\tilde{C})$. Nello scoppiamento la singolaritá in a_0 se non viene risolta, viene per lo meno semplificata.
La curva $\tilde{C}$ non interseca i divisori eccezionali E_1, E_2 poiché C non passa per i punti a_1, a_2; per il punto (c) si ha che $\tilde{C}$ incontra $\tilde{L_1}$ e $\tilde{L_2}$ in $d-r$ punti distinti e per il punto (b), $\tilde{C}$ incontra $\tilde{L_0}$ in d punti distinti. Lo scoppiamento g contrae le rette $\tilde{L_i}$ nei punti l_i, quindi C' avrá delle singolaritá in questi punti; ma queste saranno tutte ordinarie in quanto $\tilde{C}$ interseca le rette $\tilde{L_i}$ in punti distinti che corrispondono a tangenti principali distinte di C'. In conclusione C' avrá le seguenti singolaritá:
- una singolaritá ordinaria di molteplicitá d nel punto l_0 dovuta alla contrazione della retta $\tilde{L_0}$;
- una singolaritá ordinaria di molteplicitá $d-r$ nei punti l_1, l_2 dovuta alla contrazione delle rette L_1, L_2;
- eventuali singolaritá sulla retta A_0 dovute alla natura della singolaritá su a_0.
Per il resto C' é isomorfa alla curva C.

Esaminiamo piú da vicino la situazione sulla retta A_0. Siano $p_1, ..., p_t$ i punti di $C' \cap A_0$ diversi da l_1, l_2. Chiaramente $m_{p_i} \leq i(C', A_0; p_i)$; Inoltre poiché a_0 é una singolaritá di molteplicitá r per C si ha che $\sum_{i=1}^{t} i(C', A_0; p_i) = r$, e questo ci fa capire , che se non siamo stati completamente sfortunati, la situazione é migliorata: la singolaritá iniziale in a_0 é stata semplificata e per questo, il prezzo da pagare sta nell'aver introdotto singolaritá ordinarie; siamo nella buona strada

per dimostrare il teorema 1.

Inoltre é possibile dimostrare che:

Proposizione 4. *La curva C' ha grado $2d - r$.*

Dimostrazione:
Segue dalla proposizione 4. Infatti se indichiamo con $F(x, y, z)$, allora vale la relazione $F^Q(x, y, z) = F(yz, xz, xy) = x^r F'(x, y, z)$, dove F' indica l'equazione della curva C'.
Poiché $deg(F^Q) = 2d$, allora $deg(C') = 2d - r$. □

Definizione 8. *Sia $C \in \mathbb{P}^2$ una curva piana, irriducibile di grado d, con punti multipli di molteplicitá $r_p := m_p(C)$. Si pone*

$$g^*(C) := \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \frac{r_p(r_p-1)}{2}$$

*$g^*(C)$ é detto **genere geometrico** della curva piana C.*

Proposizione 5. *Sia $C \in \mathbb{P}^2$ una curva irriducibile di grado d, con $d > 2$ allora C ammette al piú $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ punti singolari contati con molteplicitá.*

Dimostrazione:
Consideriamo prima il caso $d = 3$, allora vogliamo dimostrare che la curva C ha al piú un punto singolare. Supponiamo dunque che C ammetta due punti singolari, allora ogni punto singolare ha almeno molteplicitá due. Prendiamo la retta passante per questi due punti, allora tale retta interseca la curva in almeno quattro punti contati con molteplicitá, ma ció é assurdoin quanto la curva C é irriducibile. Sia ora $d \geq 4$. Supponiamo che C abbia $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ singolaritá che indicheremo con p_i. Consideriamo poi $d - 3$ punti distinti di C, diversi dai punti singolari che chiamiamo q_j. Prendiamo una curva C' di grado $d - 2$ passante per i punti p_i, q_j per ogni i e per ogni j. Vediamo innanzi tutto che tale curva esiste:
C' esiste se i gradi di libertá di una curva di grado $d - 2$ in $\mathbb{P}^2$ é maggiore del numero dei punti su cui poniamo il passaggio; cioé se

$$(\frac{(d)(d-1)}{2} - 1) - (\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 + d - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d^2-d-2-d^2+3d-2+2+2d-6}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4d-8}{2} \geq 0 \Leftrightarrow d \geq 4$$

sempre.

Quindi la curva C' esiste ed ha in comune con la curva C almeno tutti i punti p_i, q_j che contati con molteplicitá sono almeno $2(\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1) + d - 3$ e cioé $d^2 - 2d + 1$. Per il teorema di Bezout abbiamo che le due curve C, C' si

intersecano al piú in $d(d-2) = d^2 - 2d$ punti contati con molteplicitá; ma ció é in contraddizione con quello scritto precedentemente, e la contraddizione deriva proprio dall'aver supposto $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ singolaritá. □

Lemma 2. *Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva irriducibile di grado $d > 2$ e siano $p_1, ..., p_n$ punti singolari di X di molteplicitá $r_1, ..., r_n$; allora*

$$d(d-1) \geq \sum_{i=1}^{n} r_i(r_i - 1)$$

Dimostrazione:
Sia $f(x_0, x_1, x_2)$ l'equazione che descrive la curva C e sia C' la curva descritta da $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, possiamo supporre $\frac{\partial f}{\partial x_0} \neq 0$ in quanto se il grado é diverso da uno abbiamo sicuramente una derivata parziale non nulla. La curva C' passa per i punti $p_1, ..., p_n$ con molteplicitá al piú $r_1 - 1, ..., r_n - 1$. Inoltre C e C' non hanno componenti comuni preché C é irriducibile. Per il teorema di Bezout si ha che:
$deg(C)deg(C') = \sum_{p \in C \cap C'} i(C, C'; p) \geq \sum_{p \in C \cap C'} m_p(C)m_p(C') \geq$
$\sum_{p_1,...,p_n} m_{p_i}(C)m_{p_i}(C') \geq \sum_{i=1}^{n} r_i(r_i - 1)$.
Ovvero $d(d-1) \geq \sum_{i=1}^{n} r_i(r_i - 1)$. □

Proposizione 6. *Con le notazioni della definizione precedente si ha che $g^*(C) \geq 0$.*

Dimostrazione:
Vogliamo provare che esiste una curva di grado $d-1$ passante per i punti $p_1, ..., p_n$ con molteplicitá $r_1 - 1, ..., r_n - 1$. Il sistema lineare delle curva di questo tipo ha dimensione :
$\frac{d(d+1)}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{d^2+d-2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{d(d-1)}{2} + (d-1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} + (d-1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$ per il lemma; da cui $\frac{d(d+1)}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} \geq d - 1 > 0$ poiché $n > 2$.
Allora la dimensione del sistema δ considerato é positiva, poniamo
$dim(\delta) = \alpha$. Consideriamo ora α punti $q_1, ..., q_\alpha$ di C diversi da $p_1, ..., p_d$. Sia δ' il sottosistema di δ costituito dalle curva di δ passanti per $q_1, ..., q_\alpha$. Ora $dim(\delta') \geq dim(\delta) - \alpha \geq 0$, quindi esiste una curva D di δ' passante per $q_1, ..., q_\alpha$. Ora C é irriducibile e D non puó essere una sua componente, per Bezout si ha
$d(d-1) = \sum_{p \in C \cap D} i(C, D; p) \geq \sum_{p \in C \cap D} m_p(C)m_p(D)$,
pertanto
$d(d-1) \geq \sum_{i=1}^{n} m_{p_i}(C)m_{p_i}(D) + \sum_{j=1}^{\alpha} m_{q_j}(C)m_{q_j}(D) = \sum_{i=1}^{n} r_i(r_i - 1) + \alpha$.
Per $\alpha = dim(\delta)$ vale la stima $\alpha \geq \frac{d^2+d-2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$,
da cui

$n(n-1) \geq \sum_{i=1}^{n} r_i(r_i-1) + \frac{d^2+d-2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{d^2+d-2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$
da cui $\sum_{i=1}^{n} r_i(r_i-1) \leq 2d^2 - 2d - d^2 - d + 2 = d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2)$.
Abbiamo cosí che:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(r_i-1) \leq (d-1)(d-2)$$

Pertanto

$$g^*(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(r_i-1)}{2} \geq 0$$

□

Lemma 3. *Sia $C \in \mathbb{P}^2$ una curva di grado d tale che a_0 sia una singolaritá non ordinaria di C, si trovino delle rette L_i tali che soddisfino le condizioni (a), (b), (c) sopra elencate e sia C' la trasformazione quadratica di C con punti fondamentali a_i, allora*

$$g^*(C') = g^*(C) - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$$

dove $r_i = m_{p_i}(C)$ e p_i sono i punti non fondamentali di $(C' \cap A_0)$

Dimostrazione:
Per la proposizione 12 abbiamo che il grado della curva C' é $2d - r_0$, dove $r_0 := m_{a_0}(C)$. Dunque per definizione si ha
$g^*(C') = \frac{(2d-r_0-1)(2d-r_0-2)}{2} - \sum \frac{r_p(r_p-1)}{2}$,
dove con $r_p := m_p(C')$ e p é un punto singolare di C'.
Per C scriviamo che:
$g^*(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \frac{r_t(r_t-1)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{r_0(r_0-1)}{2} - \sum_{t \neq 0} \frac{r_t(r_t-1)}{2}$.
Indichiamo con $k = \sum_{t \neq 0} \frac{r_t(r_t-1)}{2}$ Sappiamo che sulle rette L_i non ci sono punti singolari, quindi i punti singolari di C al di fuori di a_0 hanno la stessa molteplicitá dei punti singolari di C' al di fuori di $\bigcup A_i$; mentre C' nei punti fondamentali l_1, l_2 ammette una singolaritá di molteplicitá $d - r$; nel punto l_0 una di molteplicitá d ed eventuali molteplicitá sulla retta A_0 derivate dalla singolaritá di a_0 su C. Detto questo andiamo ad analizzare piú da vicino chi é $\sum \frac{r_p(r_p-1)}{2}$.
$\sum \frac{r_p(r_p-1)}{2} = 2\frac{(d-r_0)(d-r_0-1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} + k + \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2}$
dove con r_i abbiamo indicato la molteplicitá degli eventuali punti singolari $p_i \in (A_0 \cap C')$.
Infine abbiamo che:
$g^*(C') = \frac{(2d-r_0-1)(2d-r_0-2)}{2} - (2\frac{(d-r_0)(d-r_0-1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} + k + \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2})$
Svolgendo i conti otteniamo che:
$g^*(C') = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{r_0(r_0-1)}{2} - k - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} = g^*(C) - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$. □

Cerchiamo infine di dimostrare il teorema visto nel paragrafo 1.5 che diceva

Teorema 2. *Ogni curva piana irriducibile puó essere trasformata con una serie finita di trasformazioni quadratiche, in una curva piana con singolaritá eliminabili.*

Dimostrazione:
Tramite proiettivitá possiamo sempre ricondurci nelle ipotesi del lemma precedente. Abbiamo dunque in a_0 un punto di molteplicitá r_0 per la curva C. Sia C' la curva che si ottiene dalla trasformazione quadratica nei punti fondamentali a_i, allora abbiamo che $g^*(C') = g^*(C) - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i(r_i-1)}{2}$. Ora si possono verificare due casi: o $g^*(C') = g^*(C)$, o $g^*(C') < g^*(C)$. Nel primo caso abbiamo che $\sum_{i=1}^{t} \frac{r_i(r_i-1)}{2} = 0$ e quindi nella retta A_0 la curva C' non ammette singolaritá, ció ci permette di affermare che la curva C' ha una singolaritá non ordinaria in meno rispetto a C, poiché la singolaritá di a_0 é stata "trasformata" in singolaritá ordinarie. Nel secondo caso $g^*(C') < g^*(C)$, e siccome per il lemma 6 $g^* \geq 0$, ripetendo il procedimento arriveremo ad avere una curva con solo singolaritá ordinarie. □

Grazie a questo teorema, abbiamo completamente dimostrato quanto segue

Teorema 3. *Ogni curva piana ammette una risoluzione delle singolaritá.*

Dimostrazione:
Sia C una curva piana, irriducibile e ridotta con singolaritá.
Supponiamo che C ammetta un'unica singolaritá in O. Ci sono diversi tipi di singolaritá, analizziamo prima il caso in cui il punto O sia un punto di molteplicitá m con m tangenti principali distinte. Scoppiamo il punto O, sappiamo che l'applicazione $p : p^{-1}(C \setminus \{O\}) \to C \setminus \{\}O$ é un isomorfismo e per questo l'applicazione $p : \tilde{C} \to C$ é birazionale. Vogliamo dunque dimostrare che $\tilde{C}$ é liscia. L'unica cosa che dobbiamo provare é che sia liscia su ogni punto del divisore eccezionale. Il divisore eccezionale corrisponde al $\mathbb{P}^1$ delle direzioni tangenti in O, poiché abbiamo m tangenti principali allora sicuramente per continuitá, e per quanto visto prima l'intersezione di $\tilde{C}$ con E é uguale ad m punti distinti. Dunque lo scoppiamento della singolaritá ordinaria risolve la singolaritá, pertanto la dimostrazione segue dal teorema precedente. □

Capitolo 3

Sistemi lineari e superfici razionali

3.1 Sistemi lineari e morfismi

Sia $S = k[x_0, x_1, x_2]$ l'insieme dei polinomi nelle tre variabili x_0, x_1, x_2. Indichiamo con $S_n \subset S$, l'insieme dei polinomi omogenei di grado n. L'insieme S_n contiene anche il polinomio nullo, ovvero il polinomio costantemente unguale a zero.

Lemma 4. *S_n é un k-spazio vettoriale di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.*

Dimostrazione:
Sia $S_d^n := \{$monomi di di grado d in $m+1$ variabili$\}$.
S_d^n é formato:
1) dai monomi che contengono x_0 che identifichiamo con S_{d-1}^n (raccogliendo x_0);
2) dai monomi che contengono x_0 che identifichiamo con S_d^{n-1}.
Ho la somma diretta $S_d^n = S_d^{n-1} \oplus S_{d-1}^n$.
Fissato $n = 1$, procedo per induzione su d.

Se $d = 0$, S_0^1 sono i monomi di grado zero in x_0, x_1, ovvero delle costanti e $dim(S_0^1) = 1$.

Vediamo che $d-1) \Rightarrow d)$. Sappiamo che $dim(S_{d-1}^1) = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix} = d$.

$S_d^1 = S_d^0 \oplus S_{d-1}^1$ implica $dim(S_d^1) = d + 1 = \begin{pmatrix} d+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vediamo che $n-1) \Rightarrow n)$. Sappiamo che $dim(S_d^{n-1}) = \begin{pmatrix} n-1+d \\ n-1 \end{pmatrix}$.

Per ipotesi induttiva su d, si ha $dim(S^n_{d-1}) = \begin{pmatrix} n+d-1 \\ n \end{pmatrix}$ allora

$dim(S^n_d) = \begin{pmatrix} n+d-1 \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+d-1 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+d-1 \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+d-1 \\ n \end{pmatrix} =$

$\frac{(n+d-1)!}{d!(n-1)!} + \frac{(n+d-1)!}{n!(d-1)!} = \frac{(n+d-1)\cdot\ldots\cdot(d+1)d}{d(n-1)!} + \frac{(n+d-1)\cdot\ldots\cdot n}{n(d-1)!} = \frac{(n+d)(n+d-1)!}{n!d!} = \begin{pmatrix} n+d \\ n \end{pmatrix}.$

Questo completa la nostra dimostrazione, quindi $dim(S^n_d) = \begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix}$

□

Deduciamo che, l'insieme $\mathbb{P}(S_n)$, delle curve piane di grado n di $\mathbb{P}^2$ é uno spazio proiettivo di dimensione $N_n := \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$

Definizione 9. *Un **sistema lineare di curve piane di grado** d è un sottospazio lineare di $\mathbb{P}(S_d)$, dove con S_d indichiamo l'insieme dei polinomi omogenei di grado d. La dimensione proiettiva del sistema lineare è la dimensione del sottospazio lineare di $\mathbb{P}(S_d)$.*

Osservazione 10. *Sia δ un sistema lineare di dimensione n, allora si dice che δ é ∞^n. Darsi un sistema lineare ∞^n di curve di grado d é equivalente a darsi un sottospazio vettoriale di dimensione $n+1$ di S_d, se $f_0, ..., f_n$ sono una base di tale sottospazio, ogni curva del sistema avrá un'equazione del tipo $a_0f_0 + ... + a_nf_n$.*

Definizione 10. *Un punto $p \in \mathbb{P}^2$ é un **punto base** del sistema lineare δ se ogni curva del sistema passa per p. Il luogo base di δ é dato dall'insieme dei suoi punti base.*

Sia δ un sistema lineare di dimensione n di curve piane di grado d. Supponiamo δ senza punti base. Sia $(f_0, ..., f_n)$ una base del corrispondente spazio vettoriale $V \in S_d$. Possiamo definire un morfismo
$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^n : x \longmapsto (f_0(x), ..., f_n(x))$. Il morfismo φ è ben definito in quanto δ è senza punti base e dunque per ogni $x \in \mathbb{P}^2$ esiste $i \in \{1, ..., n\}$ tale che $f_i(x) \neq 0$. Per ogni $x \in \mathbb{P}^2$ possiamo definire $\delta_x := \{C \in \delta | x \in C\}$ che corrisponde a tutte le curve di δ che passano per il punto x.

Lemma 5. *Dire che δ è senza punti base equivale a dire che δ_x è un iperpiano di δ per ogni $x \in \mathbb{P}^2$.*

Dimostrazione
$\Rightarrow$ Vogliamo dimostrare che δ_x é un iperpiano di $\mathbb{P}^n \cong \delta$. Tutte le curve di δ sono della forma $C = \sum_{i=0}^n a_i f_i$. In particolare tutte le curve $C = \sum_{i=0}^n a_i f_i$

$\in \delta_x$, sono tali che $\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x) = 0$. Poiché x é fissato, i termini $f_i(x)$ sono delle costanti e dunque l'ultima equazione rappresenta appunto un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ nelle coordinate omogenee $[a_0 : ... : a_n]$.
$\Leftarrow$ Sia ora δ_x un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. Posso sempre trovare $a = [a_0 : ... : a_n] \in \mathbb{P}^n \backslash \delta_x$. Se prendiamo $C := \sum_{i=0}^{n} a_i f_i$ questa sicuramente é una curva di δ ma per come é stata definita non passa per il punto $x \in \mathbb{P}^2$, quindi δ non ammette punti base. □

Da questo lemma riusciamo dunque a ricavare un altro modo per definire il morfismo φ, detta anche descrizione "senza coordinate"; ovvero si definisce $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}_n^* : x \longmapsto \delta_x$. Dove con $\mathbb{P}_n^*$ indichiamo il duale di $\mathbb{P}^n$. Supporremo $\varphi(\mathbb{P}^2)$ essere sempre una superficie.

Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano di equazione $\sum_{i=0}^{n} a_i Y_i = 0$, e sia $S = \varphi(\mathbb{P}^2)$. L'intersezione $H \cap S$ è data da $\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x) = 0$. Cioè i punti di $\varphi^{-1}(H \cap S)$ sono i punti della curva di δ di equazione $\sum_{i=0}^{n} a_i f_i = 0$. Dunque nel morfismo φ, le sezioni iperpiane di S corrispondono alle curva del sistema lineare δ. In particolare intersecando una sezione iperpiana di S con un altro iperpiano H' si ottiene un numero finito di punti e questo numero corrisponde al grado della superficie S: $deg(S) := card(H \cap H' \cap S)$. Abbiamo: $(H \cap H' \cap S) = (H \cap S) \cap (H' \cap S)$. Da quanto visto prima: $\varphi^{-1}(H \cap S) = C$ e $\varphi^{-1}(H' \cap S) = C'$. Quindi se $\varphi_{|C} : C \to H \cap S$ è biiettiva, per il teorema di Bezout, abbiamo $deg(S) = d^2$. Queste condizioni saranno soddisfatte quando φ sará un'immersione, ovvero quando φ sará iniettiva con derivata iniettiva in ogni punto.

Definizione 11. *Sia δ un sistema lineare di dimensione n di curve piane di grado d. Diremo che δ* ***separa i punti*** *se presi $p \neq q$ punti di $\mathbb{P}^2$ esiste $C \in \delta$ che passa per p ma non passa per q; e diremo che δ* ***separa i vettori tangenti*** *se presi $p \in \mathbb{P}^2$ e t una direzione tangente in p , esiste una curva appartenente a δ che passa per p con direziona tangente diversa da t.*

Teorema 4. *Sia δ un sistema lineare di dimensione n, allora:*
i) δ separa i punti se e solo se il morfismo φ che induce, (come sopra), é iniettivo;
ii) δ separa i vettori tangenti se e solo se φ ha derivata iniettiva.
Deduciamo che φ é un'immersione se e solo se δ separa i punti e i vettori tangenti.

Dimostrazione:
i)$\Rightarrow$) Utilizzando la descrizione senza coordinate di φ; sappiamo che $\varphi(x)$ descrive l'iperpiano di tutte curve di δ che passano per il punto x, analogamente

$\varphi(y)$ rappresenta l'iperpiano di tutte le curve di δ che passano per y. Poiché $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, allora esiste una curva di δ che passa per x ma non per y.
$\Leftarrow$) Viceversa se $x \neq y$ esiste una curva di δ che passa per x ma non per y, dunque l'iperpiano che rappresenta le curve passanti per x é diverso da quello che rappresenta le curve passanti per y, dunque $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.
ii) Fissiamo una base $(F_1, ..., F_n)$ del nostro sistema lineare. Passando al piano affine abbiamo un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^n : p \longmapsto (f_1(p), ..., f_(p))$. Dove ψ rappresenta l'applicazione φ nel piano affine. La matrice Jacobiana di questa funzione in un punto p é:

$$\mathcal{J}_{(p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ ... & ... \\ ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Possiamo supporre $f_i(p) = 0$ per ogni i. Allora la retta tangente in p alla curva f_i del sistema é data dall'equazione: $x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} = 0$.
Notiamo che la derivata é iniettiva se e solo se la matrice Jacobiana ha rango due, se e solo se ci sono due righe linearmente indipendenti, ovvero se e solo si hanno due rette tangenti differenti nel punto p rispetto alle curve f_i. Infatti, supponiamo ad esempio $(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(p))$ linearmente indipendente a $(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(p))$, allora la tangente a f_i nel punto p é diversa dalla tangente a f_j nel punto p con $i \neq j$. Pertanto anche il secondo punto è stato dimostrato. □

Sia δ il sistema lineare delle curve di grado d in $\mathbb{P}^2$. La dimensione di δ é data dalla dimensione proiettiva di S_d, che é N_d. Sia $(f_0, ..., f_{N_d})$ una base di δ. Vogliamo dimostrare che un tale sistema induce un morfismo
$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^{N_d} : x \longmapsto (f_0(x) : ... : f_{N_d}(x))$, e che tale morfismo é un'immersione.

Lemma 6. *Il sistema δ sopra definito separa i punti e i vettori tangenti di $\mathbb{P}^2$.*

Dimostrazione:
Siano $x, y \in \mathbb{P}^2$. Prendiamo in considerazione un fascio di rette passante per il punto $O \in \mathbb{P}^2$, con $O \neq x$ e $O \neq y$ e tale che $O \notin < x, y >$. Siano $r_x =< O, x >$ e $r_y =< O, y >$, allora la curva C formata da r_x e da altre $d-1$ rette del fascio diverse da r_y, é una curva di δ passante per x ma non per y. Il sistema δ separa i punti.
Sia ora $x \in \mathbb{P}^2$ e t una direzione tangente ad x. Prendiamo R una retta passante per x con direzione diversa da t. Allora la curva formata da R e da altre $d-1$ rette non passanti per x ha direzione tangente in x diversa da t. Il sistema δ separa i vettori tangenti. □

Proposizione 7. *Il morfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^{N_d}$ indotto da δ è un'immersione.*

Dimostrazione:
Segue dal lemma precedente e dal teorema 4. □

Questa proposizione é di rilevante importanza in quanto ci dice che ogni superficie del tipo $\varphi(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, (con φ un morfismo del tipo sopra descritto), é una superficie isomorfa a $\mathbb{P}^2$. Inoltre una sezione iperpiana generica di tale superficie é una curva di grado d e corrisponde ad una curva del sistema lineare δ di partenza.

Per capire meglio la situazione facciamo un esempio concreto. Sia δ il sistema lineare di tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$. Per quanto visto prima la dimensione di δ é la dimensione proiettiva dello spazio S_2, di tutti i polinomi omogenei di grado due, e vale $\frac{(2+1)(2+2)}{2} - 1 = 5$. Prendiamo come base di δ, $(x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$ e scriviamo il morfismo
$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5 : (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$. Il morfismo φ é ben definito in quanto δ non ammette punti base. Per quanto visto prima il sistema lineare δ separa i punti e i vettori tangenti.

Abbiamo che φ é un'immersione e dunque $V = Im(\varphi)$ é una superficie di $\mathbb{P}^5$ isomorfa a $\mathbb{P}^2$ che viene chiamata *superficie di Veronese*. In particolare V è una superficie razionale.

La superficie V ha proprietá e caratteristiche di rilevante importanza e per questo verrá trattata con piú rigore nel paragrafo successivo. Per ora ci accontenteremo di farne una prima analisi.

Proposizione 8. *La superficie V ha grado quattro.*

Siano H, H' iperpiani di $\mathbb{P}^5$. Il grado di V é dato da:
$deg(V) = card(H \cap H' \cap V)$. Sappiamo che l'intersezione di un iperpiano di $\mathbb{P}^5$ con V ci dá una curva, che corrisponde, tramite φ^{-1}, ad una curva del sistema lineare δ. Dal momento che φ é un'immersione $card(H \cap H' \cap V) = card((H \cap V) \cap (H' \cap V))$ ed é uguale al numero dei punti di intersezione di due coniche di $\mathbb{P}^2$. In generale due coniche di $\mathbb{P}^2$ si intersecano in quattro punti, quindi V ha grado quattro. □

Potevamo dedurre questo risultato dal caso generale, ma in questo modo vogliamo evidenziare nel particolare, quanto é stato fatto prima in geneale.

3.2 Sistemi lineari con punti base e scoppiamenti.

Se δ' ha un luogo base B, é chiaro che in un punto $x \in B$ il morfismo φ, precedentemente descritto, non é definito, in quanto $f_i(x) = 0$ per ogni i. Ció comporta una indeterminazione in $x \in B$. Vediamo come é possibile togliere l'indeterminazione.
Sia δ' il sistema lineare di tutte le curve piane di grado d che passano per un punto $O \in \mathbb{P}^2$, e tale che O sia l'unico punto base di δ'. Sia $(f_0, ..., f_n)$ una base di tale sistema. Chiaramente il morfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^n : p \longmapsto (f_0(p) : ... : f_n(p))$, non é definito per il punto O. Come fare? Cerchiamo di togliere l'indeterminazione usando l'unico strumento a nostra conoscenza: lo scoppiamento. Prima di tutto notiamo che $\delta' \subset \delta$, dove con δ indichiamo tutte le curve piane di grado d. Essendo δ privo di punti base, lo possiamo immergere senza problemi in $\mathbb{P}^{N_d}$. Chiaramente δ' é un iperpiano di δ, ció significa che é un sistema lineare di dimensione $N_d - 1$, e di luogo base $\{O\}$. Sia S la chiusura di $\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})$ e sia $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ lo scoppiamento del punto O. Se C é una curva generica di δ', abbiamo: $p^*(C) = \tilde{C} + E$ (dove con E indichiamo il divisore eccezionale). Se C e C' sono due curve generali su δ', C e C' sono lisce e trasversali in O, cioé hanno tangenti distinte in O. Questo ci permette di concludere che $\tilde{C}$ e $\tilde{C}'$ non hanno punti in comune su E. Inoltre due curve, C e C' di δ', al di fuori di O, si intersecano in altri $d-1$ punti contati con molteplicitá, allora a sua volta $\tilde{C}$ e $\tilde{C}'$ si intersecano in $d-1$ punti, in quanto p induce un isomorfismo tra $\hat{\mathbb{P}} \setminus E$ e $\mathbb{P}^2 \setminus \{O\}$. Dunque in $\hat{\mathbb{P}}$ viene a perdersi l'intersezione in O.

Sia $\Delta := p^*\delta' - E$ il sistema lineare di $\hat{\mathbb{P}}$ composto da tutte le curve $p^*C - E$ con $C \in \delta'$. Il sistema Δ é senza punti base su $\hat{\mathbb{P}}$ in quanto l'unico punto di base di δ' viene scoppiato; inoltre é possibile dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 9. *i) Il sistema Δ separa i punti di $\hat{\mathbb{P}}$;*
ii) Il sistema Δ separa i vettori tangenti di $\hat{\mathbb{P}}$, cioé dati $x \in \mathbb{P}^2$ e t un vettore tangente in x a $\hat{\mathbb{P}}$, esiste $X \in \Delta$ tale che $x \in X$, X é liscia in x con tangente diversa da t.

Dimostrazione

Sicuramente Δ separa i punti e i vettori tangenti in $\hat{\mathbb{P}} \setminus E$ in quanto li separa in $\mathbb{P}^2$. Ci focalizziamo quindi sul divisore eccezionale. Notiamo che su E, Δ separa i punti se é possibile trovare 2 curve del sistema δ' che hanno tangente differente in O, ma questo é sempre possibile. Infatti siano C e C' due curve di δ' tali che C e C' siano l'unione di d rette distinte. Sia r una retta passante per O, siano $p_1, ..., p_{d-1}$ $d-1$ punti distinti appartenenti a r diversi da O, e sia $x \in \mathbb{P}^2 \setminus r$. Possiamo vedere C come l'unione delle rette r e $< x, p_i >$ con

$i \in \{1, ..., d-1\}$. Costruiamo C' in modo analogo, ma tale che la retta passante per O sia differente da r. Le curve C e C' hanno tangenti differenti in O. Per quanto riguarda i vettori tangenti questo segue criterio di molta ampiezza che ora enunceremo.

Criterio di molta ampiezza su $\hat{\mathbb{P}}$: Sia δ un sistema lineare di curve piane con punto base O e sia $\hat{\mathbb{P}}$ lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in O; infine sia Δ il sistema lineare $p^*\delta \setminus E$. Sia $x \in E$ e sia Q una curva di grado due per O di direzione tangente x in O. Sia δ_x l'insieme delle curve di δ che hanno direzione tangente x in O. Con queste notazioni Δ separa i vettori tangenti in $x \in E$, se esiste una curva in δ_x che ha contatto esattamente uguale a due con Q in O.

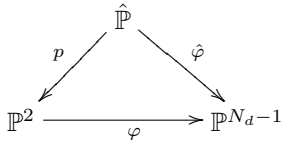
Dunque data una curva di grado d, $Q \in \delta'$ mi basta trovare un'altra curva $Q' \in \delta'$ che abbia esattamente contatto uguale a due con Q in O; ma ció é sempre possibile in quanto mi basta prendere la curva formata dalla retta tangente a Q in O e da altre $d-1$ rette non passanti per O.

Con questo criterio abbiamo definitivamente dimostrato che Δ separa i punti e i vettori tangenti su $\hat{\mathbb{P}}$. □

Poiché Δ separa i punti e i vettori tangenti, induce un'immersione $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^{N_d-1}$. Questo ci permette di dire che la superficie $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ é liscia e irriducibile in quanto $\hat{\mathbb{P}}$ é una superficie liscia e irruducibile.

Proposizione 10. *La superficie S risula essere uguale alla superficie $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$.*

Dimostrazione:
Per come é stata definita $\hat{\varphi}$ il seguente diagramma commuta:



E' dunque chiaro che $\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\}) \subsetneq \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$. Poiché φ é a sua volta un'immersione allora $\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})$ é un aperto di $\mathbb{P}^{N_d-1}$ ed in particolare per la topologia indotta, é un aperto di $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ che é irriducibile, dunque $\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})$ é denso in $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ e quindi $S = \overline{\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$. □

Osservazione 11. *La superficie S ha grado $d^2 - 1$.*

Dimostrazione:
Una sezione iperpiana della superficie S corrisponde per quanto visto prima ad

una curva $\tilde{C}$ di Δ e due curve generiche di questo tipo si intersecano in $d^2 - 1$ punti; dunque la superficie S ha grado $d^2 - 1$. □

Proposizione 11. *Sia $C_0 := \hat{\varphi}(E)$, allora C_0 é una retta.*

Dimostrazione: Sicuramente $\hat{\varphi}(E)$ é una curva liscia in quanto é isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Andiamo ora a vedere il grado di C_0. Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^{N_d-1}$. $H \cap C_0 = H \cap (S \cap C_0) = (H \cap S) \cap C_0$. Su $\hat{\mathbb{P}}$, $H \cap S$ é una generica curva $\tilde{C}$ di Δ. Siccome $card(\tilde{C} \cap E) = 1$ allora $card(H \cap C_0) = 1$ e quindi C_0 ha grado 1, ovvero é una retta. □

Andiamo a vedere nel particolare cosa succede con un sistema lineare di coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per un punto.
Sia δ' il sistema lineare delle coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per il punto $O = [0 : 0 : 1]$. Chiaramente δ' é un iperpiano di δ, dove con δ intendiamo il sistema lineare di tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$. Poiché $(x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$ rappresenta una base di δ, allora $\delta \cong \mathbb{P}^5$ ció significa che δ' é un sistema lineare di dimensione quattro con luogo base $\{O\}$. Procedendo come prima, possiamo definire un morfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^4 : x \longmapsto (f_0(x) : ... : f_4(x))$, dove $\{f_i\}$ é una base del sottospazio vettoriale corrispondente a δ'. Sia S la chiusura di $\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})$ in $\mathbb{P}^4$ e sia $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ nel punto O. Se C é una curva generica di δ', abbiamo: $p^*(C) = \tilde{C} + E$. Se C e C' sono due curve generali su δ', allora, per le osservazioni fatte precedentemente $\tilde{C}$ e $\tilde{C}'$ si intersecheranno in tre punti in quanto, in $\hat{\mathbb{P}}$ viene a perdersi l'intersezione in O.

Inoltre la superficie $S = \overline{\varphi(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ é liscia e irriducibile di ha grado tre, che é dato dal numero dei punti di intersezione di due curve generiche di Δ, dove con Δ indichiamo il sistema lineare $p^*(C) - E$ con $C \in \delta$.

La curva $\hat{\varphi}(\tilde{C})$, dove con $\tilde{C}$ indichiamo una generica curva di Δ, puó esser vista come una sezione iperpiana di S. Per il teorema di Bertini una seziona iperpiana generale di una varietá liscia é liscia, quindi in generale $\hat{\varphi}(\tilde{C})$ é una cubica gobba di $\mathbb{P}^4$.

Definizione 12. *Diciamo che una superficie S é detta **scroll** se per ogni punto $p \in S$ esiste una retta passante per p e contenuta in S; piú precisamente esiste un morfismo suriettivo $f : S \to C$, dove C é una curva liscia, tale che per ogni $x \in C, f^{-1}(x) \subset \mathbb{P}^4$ é una retta. Inoltre le fibre di f vengono chiamate **generatrici della rigata** e le generatrici sono sghembe due a due.*

Proposizione 12. *La superficie S é uno scroll.*

Dimostrazione:
Consideriamo il fascio di rette in $\mathbb{P}^2$ passanti per O. Se L, D sono due rette del fascio, allora $\tilde{L} \cap \tilde{D} = \varnothing$. D'altra parte $l := \hat{\varphi}(\tilde{L})$ é una retta. Infatti sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^4$ e consideriamo $H \cap l$, vogliamo capire quanti sono i punti d'intersezione. Questo ci porta a considerare $\tilde{L} \cap \tilde{C}$, dove con $\tilde{C}$ consideriamo la sezione iperpiana di S rappresentata da H e con C la rispettiva curva appartenente a δ' . La conica C e la retta L di $\mathbb{P}^2$ s'intersecano in due punti, uno dei quali é appunto O. Dopo lo scoppiamento l'intersezione con O scompare e risulta $card(\tilde{L} \cap \tilde{C}) = 1$; allora $card(H \cap l) = 1$ quindi l é una retta. Quanto detto ci permette di dire che, per ogni punto $q \in \hat{\mathbb{P}}$ che non appartiene al divisore eccezionale passa sempre la retta $l_q \in S$ che é la preimmagine, attraverso p, della retta $L_{p^{-1}(q)}$ che passa per i punti O e $p^{-1}(q)$. Se invece il punto $q \in E$ allora per questo punto passa sicuramente la retta $l_q \in S$ che é data dalla preimmagine attraverso p della retta passante per O con direzione q. In conclusione le generatrici non sono altro che le preimmagini attraverso p delle rette passanti per O. In effetti abbiamo un morfismo suriettivo dato da $f : S \to C_0$ le cui fibre sono le generatrici. Il morfismo f é proprio quello che ad ogni punto $p \in S$ associa $l_p \cap C_0$. Notiamo che f é ben definito in quanto $p^{-1}(l_p)$ é una retta passante per O, e dunque l_p incontra il divisore eccezionale in uno ed un solo punto che corrisponde alla direzione della retta rispetto ad O. Il morfismo f é evidentemente suriettivo in quanto f ristretto al divisore eccezionale é l'identitá. Sia ora $x \in C_0$, allora $f^{-1}(x)$ sono tutti quei punti che in $\mathbb{P}^2$ appartengono alla retta che passa per O con direzione x, e dunque le preimmagini attraverso p delle rette passanti per O sono proprio le generatrici di S. □

Cerchiamo di confrontare i sistemi lineari senza punti base e con un punto base.
Sia δ il sistema lineare delle curve di grado d. Il sistema δ ha dimensione N_d e induce un'immersione φ tale che $S = \varphi(\mathbb{P}^2)$ é una superficie di $\mathbb{P}^{N_d}$ liscia irriducibile di grado d^2. Sia ora δ' il sistema lineare delle curve di grado d passanti per un punto $O \in \mathbb{P}^2$. Il sistema δ' ha dimensione $N_d - 1$ e induce un'immersione φ' tale che $S' = \overline{\varphi'(\mathbb{P}^2 \setminus \{O\})}$ é una superficie di $\mathbb{P}^{N_d-1}$ liscia irriducibile di grado $d^2 - 1$. Detto questo ci domandiamo se le due superfici S e S' siano in qualche modo legate tra loro. In effetti si riesce a dimostrare che:

Teorema 5. *La superficie S' non é altro che la proiezione di S, da un suo punto, su un iperpiano.*

Dimostrazione:
La superficie S rappresenta l'immagine di $\mathbb{P}^2$ tramite l'immersione data dal

sistema lineare completo delle curve di grado d di $\mathbb{P}^2$, mentre sappiamo che S' rappresenta l'immagine di $\mathbb{P}^2 \setminus \{O\}$ tramite l'immersione data dal sistema lineare delle curva di grado d passanti per O. Poiché un iperpiano di $\mathbb{P}^{N_d}$ rappresenta l'insieme delle curve di grado d passanti per un punto, possiamo vedere S' come la proiezione di S su questo iperpiano. Sia $a \in S$ l'immagine del punto $O \in \mathbb{P}^2$ e sia $\pi : S \to \mathbb{P}^{N_d-1}$ la proiezione di centro a. La proiezione é definita su $S \setminus \{a\}$, sia $X \subset \mathbb{P}^{N_d-1}$ la chiusura di $\pi(S \setminus \{a\})$. Le sezioni iperpiane di X corrispondono alle sezioni iperpiane di S che passano per a, cioé alle curve di grado d in $\mathbb{P}^2$ che passano per O. Concludendo si ha che $S' = X$. □

Tutto quello che é stato fatto per i sistemi lineari di curve con un punto base, lo possiamo estendere a sistemi lineari di curve con piú punti base, (ma sempre in numero finito). È chiaro che se il sistema lineare ammette due punti base, allora li dovremo scoppiare entrambi.
Sia ora δ un sistema lineare di dimensione n con un numero finito di punti base. Indichiamo con $\mathtt{B}$ il luogo dei punti base di δ. Sia $(f_0, ..., f_n)$ una base di δ e definiamo il morfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^n : x \longmapsto (f_0(x), ..., f_n(x))$. Chiaramente tale morfismo non é definito per ogni $x \in \mathtt{B}$. Per ovviare al problema, scoppiamo i punti $x \in B$, in modo tale da allargare il dominio ed estendere il morfismo φ a tutta le superficie $\hat{\mathbb{P}}$ dello scoppiamento. Abbiamo che il morfismo $\hat{\varphi}$ esteso a tutta la superficie dello scoppiamento é definito ovunque se le curve di δ non hanno la medesima direzione tangente direzioni nei punti base, ma non é detto che sia un'immersione. Infatti, il morfismo assocciato alla trasformazione quadratica, data dal sistema lineare di coniche passanti per tre punti, non é iniettivo.

Capitolo 4

Sistemi di coniche

In questa sezione vogliamo concentrare la nostra attenzione su sistemi di coniche, andiamo dunque ad esaminare piú nel dettaglio cosa succede se abbiamo un sistema lineare di coniche senza punti base, con un punto base ed infine con due punti base.

4.1 Sistema di coniche senza punti base

. Riprendiamo quanto fatto nel paragrafo precedente per i sistemi di curve privi di punti base. Sia δ il sistema lineare delle coniche di $\mathbb{P}^2$, allora δ induce il morfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5 : (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$. Tale morfismo é un'immersione e la superficie $V := \varphi(\mathbb{P}^2)$ é isomorfa a $\mathbb{P}^2$, in particolare é liscia e razionale. Sappiamo inoltre che $deg(V) = 4$.

Analizziamo alcune proprietá di questa superficie:

Proposizione 13. *Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva di grado d, allora $\varphi(C) \subset V$ ha grado $2d$ in particolare V non contiene rette.*

Dimostrazione:
Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva di grado d. Consideriamo la curva $C' = \varphi(C)$. Per capirne il grado, intersechiamo C' con un iperpiano H di $\mathbb{P}^5$. Notiamo che $C' \cap H = C' \cap V \cap H$, sappiamo che $V \cap H$ corrisponde ad una curva del sistema δ, ovvero ad una conica K di $\mathbb{P}^2$, poiché φ é un'immersione si ha che $card(C' \cap V \cap H) = card(C \cap K) = 2d$; quindi il grado di C' é proprio $2d$. In particolare V non puó contenere rette in quanto, per ció che é stato appena dimostrato, ogni curva contenuta in V ha grado pari. □

Diretta conseguenza di questa proposizione é quanto segue:

Proposizione 14. *Dati due punti p e q di V esiste una conica liscia contenuta in V passante per p e q. Piú precisamente V é coperta da una famiglia di dimensione due di coniche irriducibili.*

Dimostrazione:
Siano $p, q \in V$, poiché φ é un isomorfismo sull'immagine, allora esistono $p', q' \in \mathbb{P}^2$ tali che $p = \varphi(p')$ e $q = \varphi(q')$. Indichiamo con $R_{p',q'}$ la retta passante per i punti p', q', allora la curva $C_{p,q} := \varphi(R_{p',q'})$, passa per i punti p, q ed é di secondo grado. Poiché la superficie di Veronese non contiene rette si ha che $C_{p,q}$ é una conica irriducibile. Pertanto V é coperta da una famiglia di coniche irriducibili. Tale famiglia ha dimensione due. Infatti tutte le coniche contenute in V corrispondono a tutte le rette di $\mathbb{P}^2$, che non sono altro che i punti del duale di $\mathbb{P}^2$ che ha dimensione due. Questo conclude la nostra dimostrazione. □

Intendiamo ora dare un'altra interpretazione della superficie di Veronese. Prendiamo $(x_0^2, x_1^2, x_2^2, 2x_0x_1, 2x_0x_2, 2x_1x_2)$ una base del sistema lineare delle coniche di $\mathbb{P}^2$. Procedendo come prima, consideriamo il morfismo
$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5 : (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0^2 : x_1^2x_2^2 : 2x_0x_1 : 2x_0x_2 : 2x_1x_2)$. Sappiamo che questo morfismo é un'immersione e che $Im(\varphi) = V$, dove con V intendiamo la superficie di Veronese. Notiamo che se invece di prendere $\mathbb{P}^2$ come dominio di φ prendiamo il duale di $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_*$, allora questo morfismo non fa altro che mandare ogni retta nella sua retta doppia, in altri termini abbiamo che:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2 &\to \mathbb{P}^5 \\ L &\longmapsto L^2 \end{aligned}$$

dove con L intendiamo una retta di $\mathbb{P}^2$. Pertanto ogni punto che appartiene a V corrisponde ad una retta doppia di $\mathbb{P}^2$. Questo ci fa intuire che la superficie di Veronese, in realtá, é legata alle coniche di $\mathbb{P}^2$ in modo molto piú profondo di quello che finora abbiamo visto.

Definizione 13. *L'insieme di tutte le bisecanti della superficie di Veronese é detta* ***varietá delle secanti*** *e si indica con*
$Sec(V) := \overline{\{x \in \mathbb{P}^5 | \exists y, z \in V, y \neq z \ t.c. \ x \in < y, z >\}}$.

Proposizione 15. *La varietá delle secanti rappresenta tutte le coniche singolari di $\mathbb{P}^2$.*

Dimostrazione:
Sia $z \in Sec(V)$, allora esiste una retta passante per z che é bisecante rispetto la superficie di Veronese, ovvero che interseca V in due punti L^2, M^2. Per

quanto detto prima L^2, M^2 rappresentano due rette doppie di $\mathbb{P}^2$, che indichiamo rispettivamente L ed M. Ogni punto della retta R passante per L^2, M^2 lo possiamo scrivere nella forma $\lambda L^2 + \mu M^2$, con λ, μ sono degli scalari mai entrambi nulli. Poiché $z \in R$, allora esistono λ_z, μ_z tali che $z = \lambda_z L^2 + \mu_z M^2$. A meno di proiettivitá posso sempre supporre $z = x_0^2 + x_1^2$, questa rappresenta sicuramente una conica singolare di $\mathbb{P}^2$, (basta considerare le derivate parziali). Viceversa se C é una conica singolare di $\mathbb{P}^2$, allora a meno di proiettivitá posso sempre considerare $C = x_0 x_1$, con semplici passaggi algebrici otteniamo che $C = \frac{1}{4}(x_0 + x_1)^2 - \frac{1}{4}(x_0 - x_1)^2 = \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{4}M^2$, dove con L, M indichiamo rispettivamente le rette $x_0 + x_1, x_0 - x_1$. Cosí facendo abbiamo dimostrato che ogni conica singolare la possiamo scrivere come somma di due rette doppie, e dunque ogni conica singolare rappresenta un punto sulla varietá delle secanti di V. □

É chiaro che la superficie di Veronese é tutta contenuta nella varietá delle secanti. Infatti se prendiamo $w, z \in V$, allora la retta $< z, w > \subset Sec(V)$ e quindi $V \subset Sec(V)$. La varietá delle secanti rappresenta quindi tutte le coniche singolari di $\mathbb{P}^2$ e in particolare rappresenta anche tutte le coniche formate da rette doppie. Sicuramente $Sec(V)$ non ricopre tutto $\mathbb{P}^5$ in quanto esistono un'infinitá di coniche liscie che ammettono un rappresentante in $\mathbb{P}^5$ che non si trova in $Sec(V)$. Vogliamo analizzare piú approfonditamente le proprietá di $Sec(V)$.

Proposizione 16. *La varietá delle secanti é una varietá determinantale di dimensione quattro e grado tre.*

Dimostrazione:
Le coniche singolari di $\mathbb{P}^2$ del tipo $a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 + a_5x_1x_2$, sono tutte e sole quelle date dall'annullarsi del determinante della matrice associata:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_3}{2} & \frac{a_4}{2} \\ \frac{a_3}{2} & a_1 & \frac{a_5}{2} \\ \frac{a_4}{2} & \frac{a_5}{2} & a_2 \end{pmatrix}$$

$Det(C) = a_0(a_1a_2 - \frac{a_5^2}{4}) - \frac{a_3}{2}(\frac{a_3a_2}{2} - \frac{a_5a_4}{4}) + a_4(\frac{a_5a_3}{4} - \frac{a_1a_4}{2}) = a_0a_1a_2 - a_0a_5^2 - a_2a_3^2 + a_3a_4a_5 - a_1a_4^2 = 0$. Passando alle coordinate omogenee di $\mathbb{P}^5$ otteniamo:

$$Sec(V) : x_0x_1x_2 + x_3x_4x_5 - x_0x_5^2 - x_1x_4^2 - x_2x_3^2 = 0.$$

Notiamo che per rappresentare la varietá delle secanti abbiamo bisogno di una sola equazione in $\mathbb{P}^5$ di grado tre, ció ci permette di dire che $Sec(V)$ ha dimensione quattro e grado tre. □

Inoltre si riesce a dimostrare che l'insieme delle singolaritá della varietá delle secanti é V e che la superficie di Veronese é l'unica superficie liscia di $\mathbb{P}^5$ la cui varietá delle secanti non ricopre tutto $\mathbb{P}^5$.

4.2 Sistemi di coniche con un punto base

. Riprendiamo quanto fatto nel paragrafo precedente per i sistemi di coniche con un punto base, O. Sia δ' il sistema lineare delle coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per O, allora δ' induce il morfismo
$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4 : x \longmapsto (f_0(x) : f_1(x) : f_2(x) : f_3(x) : f_4(x))$ dove con $(f_0, .., f_4)$ indichiamo una base di δ'. Tale morfismo non é definito nel punto O. Per ovviare questo problema scoppiamo O ed estendiamo φ a tutta la superficie $\hat{\mathbb{P}}$ dello scoppiamento. Da quanto dimostrato precedentemente, il morfismo esteso $\hat{\varphi}$ é un'immersione e la sua immagine, S, é una superficie di $\mathbb{P}^4$ liscia, razionale e di grado tre.

Daremo ora un'altra costruzione dello scroll cubico e approfondiremo piú nel dettaglio le sue caratteristiche principali. Sia R una retta generica di $\mathbb{P}^2$ non passante per O. La retta R interseca una conica $C \in \delta'$ in due punti, pertanto $\hat{\varphi}(R) \in S$ é una conica. Infatti sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^4$ allora $H \cap \hat{\varphi}(R) =$
$H \cap (S \cap \hat{\varphi}(R)) = (H \cap S) \cap \hat{\varphi}(R)$, ovvero $card(H \cap \hat{\varphi}(R)) = card(\tilde{C} \cap \hat{\varphi}(R))$, in quanto $\hat{\varphi}$ é un'immersione, che é equivalente al numero di punti di intersezione tra R e una conica generica del sistema δ'. La conica $\hat{\varphi}(R)$ inteseca ogni generatrice di S in un punto, perché la retta R incontra le rette passanti per O in un punto, e non incontra mai C_0 in quanto $O \neq R$. Questo da luogo ad un'altra descrizione della superficie S: siano in $\mathbb{P}^4$ una retta C_0 e un piano Π tali che $C_0 \cap \Pi = \varnothing$. Sia $K \subset \Pi$ una conica. Le curve C_0 e K sono isomorfe (essendo entrambe isomorfe a $\mathbb{P}^1$). Sia $g : C_0 \to K$ un isomorfismo. Per ogni $x \in C_0$ sia L_x la retta $< x, g(x) >$. Con le notazioni precedenti é possibile dimostrare che:

Proposizione 17. *La superficie X data dall'unione delle rette L_x al variare di x in C_0 é uno scroll e in particolare é una superficie isomorfa a S.*

Dimostrazione:
Per come é stata costruita, la superficie X é uno scroll. Per dimostrare il resto della proposizione facciamo vedere che possiamo costruire la superficie S esattamente come abbiamo costruito X. Sia R una retta di $\mathbb{P}^2$ che non passa per O. Allora l'immagine della trasformata stretta di R attraverso $\hat{\varphi}$ rappresenta una conica K, liscia che non tocca la direttrice L. Facciamo ora vedere che

il piano Π contenente K intersecato con L é uguale al vuoto. Infatti se esiste $p \in \Pi \cap L$, allora la generatrice passante per p incontra la conica K in due punti, ma per le osservazioni fatte precedentemente ció non é possibile. Infine notiamo che le generatrici stabiliscono un isomorfismo tra L e K. Infatti ad ogni punto di $x \in K$ associamo il punto $F(x) := f_x \cap L$, dove con f_x indichiamo la generatrice passante per x. Chiaramente $F : K \to L : x \longmapsto F(x)$ é isomorfismo. Infatti dal momento che le generatrici sono sghembe tra loro, possiamo costruire un'inversa di questa applicazione con lo stesso procedimento. Così facendo abbiamo costruito S nello stesso modo di X e dunque le due superfici sono isomorfe. □

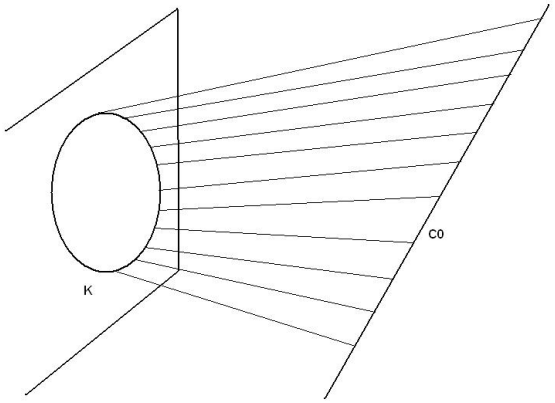


Figura 4.1: Scroll

Definizione 14. *La retta $\hat{\varphi}(E) = C_0$ é detta **direttrice** dello scroll.*

Lemma 7. *Sia C una curva di $\mathbb{P}^2$ di grado d non passante per O, allora la curva $\hat{\varphi}(C) \subset S$ ha grado $2d$.*

Dimostrazione:
Quello che é stato fatto precedentemente per le rette non passanti per O si puó fare in generale per ogni curva di grado d non passante per O. Sia $X \in \mathbb{P}^2$ una curva di grado d, andiamo a calcolare il grado di $\hat{\varphi}(\tilde{X})$. Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^4$, $H \cap \hat{\varphi}(\tilde{X}) = (H \cap S) \cap \hat{\varphi}(\tilde{X})$, il numero dei punti di intersezione é dunque equivalente al numero dei punti di intersezione di $\tilde{C}$, che corrisponde alla curva data dalla sezione iperpiana, con $\tilde{X}$ e questo é equivalente ai punti di intersezione di C con X in quanto $O \neq X$. Per il teorema di Bezout $card(C \cap X) = 2d$ quindi $\hat{\varphi}(\tilde{X})$ ha grado $2d$. □

Lemma 8. *Sia C una curva di $\mathbb{P}^2$ di grado d passante per O, allora la curva $\hat{\varphi}(C) \subset S$ ha grado $2d-k$, dove $k = m_O(C)$.*

Dimostrazione Vediamo ora cosa succede se la curva $X \in \mathbb{P}^2$ di grado d passa per il punto O. Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^4$, $H \cap \hat{\varphi}(\tilde{X}) = (H \cap S) \cap \hat{\varphi}(\tilde{X})$, il numero dei punti di intersezione é dunque equivalente al numero dei punti di intersezione di $\tilde{C}$, che corrisponde alla curva data dalla sezione iperpiana, con $\tilde{X}$. Per il teorema di Bezout abbiamo che $card(C \cap X) = 2d$, ma poiché entrambe le curve passano per O, dopo lo scoppiamento l'intersezione su O viene persa e dunque $card(\tilde{C} \cap \tilde{X}) = 2d - k$, in quanto $m_O(C) = k$. Ció significa che $deg(\hat{\varphi}(\tilde{X})) = 2d - k$. □

Esiste un altro modo per costruire uno scroll cubico; ed é quello di vederlo come la proiezione su un iperpiano della superficie di Veronese. La superficie $V \in \mathbb{P}^5$ di Veronese rappresenta l'immagine di $\mathbb{P}^2$ tramite l'immersione data dal sistema completo delle coniche di $\mathbb{P}^2$; mentre sappiamo che S rappresenta l'immagine di $\mathbb{P}^2 \setminus \{O\}$ tramite l'immersione data dal sistema delle coniche passanti per O. Poiché un'iperpiano di $\mathbb{P}^5$ rappresenta l'insieme delle coniche passanti per un punto, possiamo vedere S come la proiezione di V su questo iperpiano. Sia $a \in V$ l'immagine del punto $O \in \mathbb{P}^2$ e sia $\pi : V \to \mathbb{P}^4$ la proiezione di centro a. La proiezione é definita su $V \setminus \{a\}$, sia $S' \subset \mathbb{P}^4$ la chiusura di $\pi(V \setminus \{a\})$. Le sezioni iperpiane di S' corrispondono alle sezioni iperpiane di V che passano per a, cioé alle coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per O: Concludiamo che $S' = S$; cioé lo scroll cubico di $\mathbb{P}^4$ si ottiene proiettando la superficie di Veronese di $\mathbb{P}^5$ da uno dei suoi punti.

Proposizione 18. *Le rette contenute in S sono tutte e sole le rette date dalle generatrici e da C_0.*

Dimostrazione:
Sia f una retta contenuta in S. Supponiamo che f non sia una generatrice e che sia diversa da C_0. Supponiamo $f \cap C_0 \neq \varnothing$. Notiamo innanzi tutto che la retta f interseca tutte le generatrici, poiché per ogni $p \in f$ esiste una generatrice passante per p e che incontra C_0 nel punto p_0. Prendiamo ora il piano generato da C_0 e da f. Notiamo che ogni generatrice (meno una dove i punti p e p_0 coincidono), ha due punti in comune con questo piano che sono rispettivamente il punto p di intersezione con f e il punto p_0 di intersezione con C_0, e dunque sono tutte contenute nel piano; ovvero esistono almeno due generatrici sullo stesso piano, assurdo. Supponiamo quindi $f \cap C_0 = \varnothing$, allora la curva $\varphi^{-1}(f)$ non passa per O in quanto $f \cap C_0 = \varnothing$ e $\hat{\varphi}$ é un'immersione, inoltre é liscia perché

f é liscia. Quindi per quanto visto precedentemente dovrebbe avere come grado la metá del grado di f; assurdo.

Possiamo concludere che, le rette di S sono tutte e sole le generatrici piú la direttrice. □

Giá sappiamo che le generatrici corrispondono alle rette di $\mathbb{P}^2$ passanti per O, troveremo ora una nuova interpretazione per queste rette. Per quanto detto prima, possiamo vedere S come la proiezione, della superficie di Veronese V, da un suo punto, su un iperpiano H. Sia a l'immagine del punto O attraverso l'immersione, ψ, di $\mathbb{P}^2$ che mi da la Veronese, allora prendiamo H tale che $a \notin H$. Per la proposizione precedente, le generatrici di S corrispondono alle rette di $\mathbb{P}^2$ che passano per O. Tramite ψ, queste rette corrispondono a delle coniche su V che passano per a. Possiamo quindi conludere che le generatrici di S non sono altro che le proiezioni sull'iperpiano H delle coniche di V passanti per a.

Possiamo riguardare tutto da un punto di vista analitico andando a descrivere tramite equazioni le superfici prese in causa.

Ci poniamo nella stessa situazione di prima, indicheremo dunque con δ' il sistema lineare delle coniche passanti per il punto $O = [0 : 0 : 1]$. In particolare avremo che $(x_0^2, x_1^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$ sono una base di δ', con (x_0, x_1, x_2) coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2$. Definiamo dunque
$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4 : [x_0 : x_1 : x_2] \longmapsto [x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2]$. Chiaramente φ non é definita in O e in particolare per quanto visto precedentemente la superficie S, che rappresente lo scroll, risulta essere $\overline{\varphi(\mathbb{P}^2)}$. Vogliamo ora capire piú nel dettaglio chi é $\hat{\varphi}$. Per far ció andiamo prima a fare alcune osservazioni sullo scoppiamento del punto O di $\mathbb{P}^2$.

Tutti i punti di $\hat{\mathbb{P}}$ sono dela forma $\xi = ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ tali che $x_0y_1 = x_1y_0$. Sia $\xi \neq E$ allora $x_0 \neq 0$ e $x_1 \neq 0$. Notiamo che $y_1 = x_1/x_0z_0$ cioé $[y_0 : y_1] = [y_0 : x_0/x_1y_0] = [x_0y_0 : x_1y_0] = y_0[x_0 : x_1]$ quindi in $\mathbb{P}^1$ $[y_0 : y_1]$ e $[x_0 : x_1]$ rappresentano lo stesso punto se x_0, x_1 sono entrambi diversi da 0.

Sappiamo che per i punti al di fuori del divisore eccezionale $\hat{\varphi}$ corrisponde a $\varphi \circ p$, dove con p indichiamo lo scoppiamento, $\varphi(p([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1])) = [x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2]$. Prendiamo come $\hat{\varphi}$ la mappa di Segre definita su $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ otteniamo che $\hat{\varphi}([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1]) = [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_2y_0 : x_2y_1]$, poiché in $\hat{\mathbb{P}}$ $x_0y_1 = x_1y_0$, si ha che $[x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_2y_0 : x_2y_1] = [x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_1 : x_1y_1 : x_2y_0 : x_2y_1]$. Al di fuori del divisore ecccezionale, ovvero quando $[y_0 : y_1] = [x_0 : x_1]$ come punti di $\mathbb{P}^1$, otteniamo che $[x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_1 : x_1y_1 : x_2y_0x_2y_1] = [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_1 : x_1^2 : x_0x_2 : x_1x_2]$. Tramite una permutazione τ tale che $\tau([x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_1 : x_1^2 : x_0x_2 : x_1x_2]) = [x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2]$ e una proiezione, otteniamo proprio

$\varphi(p([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1])) = [x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2]$. Ne segue che, per estendere φ é ragionevole usare la mappa di Segre, in modo tale che $\hat{\varphi}$ sia definita in tutto il divisore eccezionale.

Abbiamo appena dimostrato che:

Proposizione 19. *Lo scroll cubico S, risulta essere l'immagine della mappa di Segre ristretta a $\hat{\mathbb{P}}$ e proiettata in un iperpiano.*

Da questo punto di vista risulta facile definire lo scroll come la proiezione su un iperpiano della superficie di Veronese.

4.3 Classificazione delle quadriche

In questo paragrafo daremo un quadro generale di quali siano la quadriche in $\mathbb{P}^3$. Lo studio di tali superfici e le loro proprietá ci aiuteranno, in seguito, ad individuare quali siano le superfici ottenute a partire dalla loro rappresentazione piana. Una superficie quadrica $Q \in \mathbb{P}^3$ é definita da un polinomio omogeneo, $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$, di grado due. Darsi F é equivalente a darsi una forma quadratica su k^4, (dove con k indichiamo il campo degli scalari). Se k é algebricamente chiuso (e questo é il nostro caso), la classificazione delle forme quadratiche, modulo cambiamenti di base, é determinata dal rango; quindi modulo proiettivitá possiamo assumere che l'equazione di Q sia una delle seguenti:
a) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$;
b) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$;
c) $x_0^2 + x_1^2 = 0$;
d) $x_0^2 = 0$.

È chiaro che la matrica associata alla forma quadratica a) ha rango quattro, quella associata a b) ha rango tre, quella associata a c) ha rango due e quella associata a d) ha rango uno. L'equazione d) rappresente il piano $x_0 = 0$ contato due volte, mentre c) rappresenta una coppia di piani distinti. Infatti $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 - ix_1)(x_0 + ix_1)$. Le quadriche rappresentate da a) e da b) sono invece irriducibili. Analizzeremo piú nel dettaglio questi due casi.

Il cono quadrico

Sia $Q \in \mathbb{P}^3$ la quadrica di equazione $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. L'intersezione di Q con il piano di equazione $x_3 = 0$ é la conica, K, di equazione $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. La conica K é non singolare.

Definizione 15. *Una superficie $S \in \mathbb{P}^3$ é un **cono** di vertice v e di base la*

curva C, se S é l'uniona delle rette $< v, x >$ con $x \in C$; il caso $v \in C$ non é escluso e la curva C non deve essere necessariamente piana.
Le rette della forma $< v, x >$ vengono dette ***generatrici*** *del cono.*

Proposizione 20. *Una quadrica di rango tre, $Q \in \mathbb{P}^3$, é un cono di vertice un punto $O \in Q$ e di base una conica liscia.*

Dimostrazione:
Sia $O = [0 : 0 : 0 : 1]$ é chiaro che $O \in Q$. Se $p \in K$, (conica precedentemente definita), $p = [p_0 : p_1 : p_2 : 0]$, allora ogni punto della retta $< O, p >$ appartiene a Q. Infatti un tale punto si scrive nella forma $\lambda O + \mu p = [\mu p_0 : \mu p_1 : \mu p_2 : \lambda]$ e queste coordinate soddisfano l'equazione di Q in quanto $p \in K$. Viceversa se $p \in Q$ con $p \neq 0, p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$, la retta $< O, p >$ interseca il piano $x_3 = 0$ in un punto appartenente alla conica. Infatti un tale punto si scrive nella forma $\lambda O + \mu p = [\mu p_0 : \mu p_1 : \mu p_2 : \lambda + \mu p_3]$, quindi nell'intersezione con $x_3 = 0$, otteniamo il punto $\bar{p} = [\mu p_0 : \mu p_1 : \mu p_2 : 0]$ e poiché $p \in Q$, allora $\bar{p}$ soddisfa l'equazione di K. □

Proposizione 21. *Sia Q un cono quadrico, allora possiede un unico punto singolare (doppio) nel suo vertice, inoltre si verifica che questo é l'unico punto singolare di Q.*

Dimostrazione:
A meno di proiettivitá posso supporre Q il cono di equazione $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Andiamo a calcolare i suoi punti singolari applicando il metodo delle derivate parziali.
$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 2x_0$;
$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1$;
$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2$;
$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$;
Si verifica facilmente che solo il punto $O = (0 : 0 : 0 : 1)$ annulla tutte le derivate parziali del primo ordine, ed é dunque l'unico punto singolare di Q. Inoltre O é un punto doppio perché non annulla le derivate seconde. □

Osservazione 12. *Da questa proposizione deduciamo in particolare che Q é irriducibile. Infatti se fosse riducibile sarebbe l'unione di due superfici di grado uno, che in $\mathbb{P}^3$ si intersecano almeno in una curva, e dunque i punti singolari sarebbero un'infinitá e non uno solo.*

Proposizione 22. *Sia Q un cono di vertice O; un piano passante per O interseca Q in due generatrici; se invece H é un piano non passante per O, allora $H \cap Q$ é una conica liscia.*

Dimostrazione:
Sia H un piano che interseca il cono, allora $H \cap Q$ é una conica. Supponiamo H passante per O, sia $p \neq O$, $p \in (H \cap Q)$, allora anche la retta $< p, O > \subset H \cap Q$, in quanto i punti $O, p \in H$ e $< O, p > \subset Q$. Pertanto la conica di intersezione tra H e Q é singolare e se esiste un punto $q \in Q$ tale che $q \neq < O, p >$, allora la retta $< O, q > \subset H \cap Q$ e quindi il piano interseca Q in due generatrici. Se invece l'intersezione del cono con il piano consiste solo della retta $< O, p >$, allora tale retta e doppia e in oqni caso il piano interseca il cono in due generatrici contate con molteplicitá. Sia ora H un cono non passante per O, giá sappiamo che $H \cap Q$ é una conica, andiamo a dimostrare che non puó essere singolare ovvero andiamo a dimostrare che non esistono altre rette in Q al di fuori di quelle che passano per il vertice. Supponiamo esiste una retta $r \subset Q$ tale che $O \notin r$, notiamo che per ogni $x \in r$ $< x, O > \subset Q$ e quindi se indichiamo con $\Pi := < O, r >$ e quindi il piano Π é contenuto in Q, assurdo. □In generale riusciamo a dimostrare che:

Proposizione 23. *Una superficie irriducibile, $S \in \mathbb{P}^3$, di grado d, é un cono se e solo se possiede un punto di molteplicitá d. Questo punto é proprio il vertice del cono.*

Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Sia S un cono di vertice O di grado d, allora ogni piano interseca la superficie S in una curva di grado d. Sia ora H un piano passante per il vertice, e sia $C := S \cap H$. Notiamo che la curva C é formata da al piú d rette distinte. Infatti preso $x \in C$ e la retta $r_x := < O, x >$, allora r_x interseca in cono in $d + 1$ punti distinti e dunque $r_x \subset S \cap C$. Poiché il grado del cono é d tali rette possono essere al piú d. Da questo si deduce che esiste una retta r tutta contenuta in H, che interseca il cono solo nel vertice. Poiché la curva C ha grado d, allora r interseca C in d punti contati con molteplicitá, quindi O é un punto di molteplicitá d.

$\Leftarrow$) Sia S una superficie irriducibile, di grado d, con un punto O, di molteplicitá d. Sia $x \in S \setminus \{O\}$ e H_x un piano passante per x e O, e r_x la retta $< x, O >$. La curva $C := H_x \cap Q$ ha grado d, notiamo che $\{x, O\} \subset (r_x \cap C)$, allora $r_x \subset S$ perché interseca il cono in $d+1$ punti contati con molteplicitá; ovvero S contiene l'unione di tutte le rette del tipo $< x, O >$ con $x \in S$. In particolare se H é un piano non passante per O allora $D := H \cap S$ è una curva di grado d, e per ogni $x \in D$ $< x, O > \in S$. □

Osservazione 13. *Da quanto dimostrato sopra segue che, un cono quadrico Q,*

di vertice O, base C é un cono di vertice O e di base X, dove $X = H \cap Q$ e H é un piano generico non passante per il vertice.

Il piano tangente

Sia S una superficie di $\mathbb{P}^3$ e $p \in S$ un punto non singolare; indicheremo con T_pS il piano tangente a S in p.

Proposizione 24. *Sia $p \in Q$ cono quadrico di vertice O. Allora il piano tangente a Q in p é $T_pQ =< f_p, T_qK >$, dove f_p é la generatrice passante per p, $q = f_p \cap H_3$ (H_3 piano che non contiene O) e $K = H_3 \cap Q$. In particolare il piano tangente a Q é costante lungo una generatrice, tranne ovviamente in O, e si osserverá che $T_pQ \cap Q = 2f_p$.*

Dimostrazione:

Il piano tangente a Q in p deve contenere tutte le direzioni tangenti delle curve contenute in Q che passano per p. Poiché $f_p \subset Q$ e passa per p si ha che $f_p \subset T_pQ$. Prendiamo ora un piano Π passante per p che non contenga il vertice; Π interseca il cono in una conica liscia C (per quanto visto prima C puó essere presa come base). Per lo stesso ragionamento $T_pC \subset T_pQ$, in questo modo abbiamo trovato due direzioni tangenti indipendenti e dunque possiamo scrivere che $T_pQ =< T_pC, f_p >$. Per concludere la nostra dimostrazione ci basta far vedere che $T_pQ =< f_p, T_pC >=< f_p, T_qK >= T_qQ$. Se facciamo la proiezione da O sul piano H_3, notiamo che la conica C si proietta esattamente sulla conica K e in particolare il punto p si proietta nel punto q, dunque anche la direzione tangente in p a C si proietta nella direzione tangente a q in K e quindi $T_pQ =< f_p, T_pC >=< f_p, T_qK >= T_qQ$. □

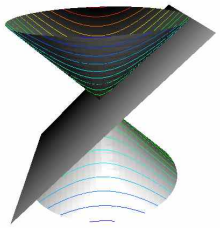


Figura 4.2: Cono e un suo piano tangente

Proposizione 25. *Sia C una curva liscia sul cono quadrico Q di grado $d > 1$. Allora ogni generatrice di Q interseca C nello stesso numero di punti. Ne deduciamo che se il grado di C é pari allora C non passa per il vertice, se invece é dispari C passa per il vertice.*

Dimostrazione:
Supponiamo di avere due generatrici f_n, f_m che intersecano la curva C, di grado d, in un numero diverso di punti contati con molteplicitá, rispettivamente n, m con $n > m$. Sia H il piano contenente f_n, f_m. Si ha che $H \cap C$ é uguale a d punti contati con molteplicitá, cioé $d = card(H \cap C) = card((H \cap Q) \cap C) = card(\{f_n, f_m\} \cap C) = m+n$. Prendiamo un altro piano H_1 che passa per f_n ma che non passa per f_m. Sicuramente $H_1 \cap Q = \{f_n, f_i\}$ dove f_i é una generatrice di Q. Analogamente a quanto fatto prima abbiamo che $card(C \cap \{f_n, f_i\}) = d$ e dunque f_i interseca la curva in m punti. Infine prendiamo H_2 il piano contenente f_i, f_m questo piano inteseca la curva in $2m > d$ punti, ció significa che la curva ammette una componente riducibile tutta contenuta nel piano e nel cono, ma ció é assurdo in quanto avremo che la curva liscia C sarebbe formata dalle due generatrici o da una generatrice contata due volte.

Supponiamo C una curva di grado $2k$, allora, per quanto dimostrato qui sopra, ogni generatrice incontra la curva in k punti. Se tra questi ci fosse anche il vertice, avremo che ogni piano H passante per il vertice interseca la curva in $k + k - 1$ punti (altrimenti il vertice verrebbe contato due volte), impossibile. E' chiaro che se la curva ha grado dispari, $2k + 1$ il vertice deve appartenere a questa curva, in quanto non possiamo dividere $2k + 1$ per due. □

Teorema 6. *Il cono quadratico é una superficie razionale.*

Dimostrazione:
Sia Q un cono quadrico e sia $p \in Q$ punto diverso dal vertice. Prendiamo ora H_0 un piano non passante per p e chiamiamo con π la proiezione di Q sul piano H_0 dal punto p. Questa applicazione induce un morfismo birazionale tra $\mathbb{P}^2$ e Q. Infatti per ogni punto del cono $q \neq p$, la retta $< p, q >$ interseca H_0 in un punto. Viceversa sia x un punto di H_0, la retta $< x, p >$, o interseca Q in due punti, $p, \pi^{-1}(x)$, oppure interseca il cono solo nel vertice; ma ció significa che tale retta deve essere tutta contenuta nel piano tangente a Q in p, ovvero $x \in T_pQ \cap H_0$. Ne segue che π contrae la retta $< p, O >$ in un punto $a \in H_0$, dove $a = H_0 \cap < p, O >$. Quindi il morfismo $\pi : Q - - > \mathbb{P}^2$, induce un isomorfismo tra $Q \setminus < p, O >$ e $\mathbb{P}^2 \setminus \{T_pQ \cap H_0\}$. □

La quadrica liscia

Sia $Q \in \mathbb{P}^3$ una quadrica di rango quattro, a meno di proiettivitá possiamo supporre che l'equazione di Q sia: $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_3 - x_1x_2 = 0$. E'chiaro che Q é una superficie liscia e quindi irriducibile. Infatti, é evidente che non

esiste alcun punto in $\mathbb{P}^3$ in grado di annullare tutte le derivate parziali di F. Consideriamo il morfismo:

$$s : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3 : ([x : y], [u : v]) \longmapsto [xu : xv : yu : yv]$$

Il morfismo s é il morfismo di Segre (di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Un punto dell'immagine di s verifica l'equazione di Q, quindi $Im(s) \subset Q$.

Proposizione 26. *L'immagine di s é una superficie irriducibile, in particolare $Im(s) = Q$*

Dimostrazione:
Per dimostrare che $Im(s)$ é una superficie irriducibile, dimostriamo che s é un morfismo iniettivo.
Siano $s([x : y], [u : v]) = s([x' : y'], [u' : v'])$ ovvero $[xu : xv : yu : yv] = [x'u' : x'v' : y'u' : y'v']$. Se $u = 0$ allora $u' = 0$. Infatti si ha che $[0 : xv : 0 : yv] = [x'u' : x'v' : y'u' : y'v']$ e dunque $x'u' = 0, y'u' = 0$, poiché x', y' non possono essere contemporaneamente nulli, $u' = 0$.
Ne segue che $[0 : xv : 0 : yv] = [0 : x'v' : 0 : y'v']$, ovvero esiste $\lambda \neq 0$ tale che: $\lambda xv = x'v'; \lambda yv = y'v'$ che implica essendo $v' \neq 0$ $x' = \lambda x \frac{v}{v'}, y' = \lambda y \frac{v}{v'}$. Da queste osservazioni possiamo affermare che $[x : y] = [x' : y']$ e $[u : v] = [u' : v']$ come punti di $\mathbb{P}^1$. Possiamo procedere in modo analogo se uno tra x, y, v é uguale a zero.
Supponiamo dunque x, y, u, v diversi da zero, si ha che $[xu : xv : yu : yv] = [x'u' : x'v' : y'u' : y'v']$, quindi esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\lambda xu = x'u', \lambda yu = y'u'$ ovvero $x' = \lambda x \frac{u}{u'}, y' = y \frac{u}{u'}$ cioé $[x : y] = [x' : y']$ come punti di $\mathbb{P}^1$. Per quanto riguarda u, v utilizziamo le equazioni $\lambda xu = x'u', \lambda xv = x'v'$ cioé $u' = \lambda u \frac{x}{x'}, v' = \lambda v \frac{x}{x'}$ e quindi anche $[u : v] = [u' : v']$ come punti di $\mathbb{P}^1$.

Poiché $Im(s)$ é irriducibile e contenuta in Q superficie irriducibile, allora $Im(s) = Q$. □

Ne segue che $s : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to Q$ é biiettiva. In effetti si dimostra che:

Proposizione 27. *s é un'immersione e pertanto $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Dimostrazione:
Per fare questo ci mettiamo sul piano affine. Prendiamo la carte locali su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $y \neq 0, v \neq 0$. Otteniamo

$$s_{yv} : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3 : (x, u) \longmapsto (xu, x, u)$$

Per dimostrare che s é un'immersione ci basta dimostrare che il differenziale di s_{yv} ha rango massimo.

$$ds_{yv} = \begin{pmatrix} u & x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché esiste un minore due per due il cui determinante non si annulla, allora la matrice ha rango massimo e dunque s é un'immersione. □

Sia $p = [x' : y']$ un punto del primo fattore; fissando p abbiamo un'applicazione parziale:

$$s_{p,} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3 : [u : v] \longmapsto [x'u : x'v : y'u : y'v]$$

I punti dell'immagine soddisfano le equazioni: $y'x_0 - x'x_2 = 0$ e $y'x_1 - x'x_3 = 0$, perció l'immagine é la retta d'intersezione di questi due piani. Indichiamo con R_p tale retta. Se $p' \neq p$, allora $R_p \cap R_{p'} = \varnothing$. Infatti se $z \in R_p \cap R_{p'}$, allora $z = s(p, q) = s(p', q')$, ma essendo s iniettivo, si ha che $p = p'$, assurdo. Questo mostra che Q é una superficie rigata, cioé ogni punto di Q é contenuto in una retta del tipo R_p.

Possiamo ripetere la stessa operazione fissando un punto, $q = [u' : v']$, nel secondo fattore:

$$s_{,q} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3 : [x : y] \longmapsto [xu' : xv' : yu' : yv']$$

I punti dell'immagine soddisfano le equazioni $v'x_0 - u'x_1 = 0$ e $v'x_2 - u'x_3 = 0$, pertanto l'immagine é la retta di intersezione di questi due piani che indicheremo con D_q. Come prima se $q \neq q'$, allora $D_q \cap D_{q'} = \varnothing$. Anche le rette D_q ricoprono tutta la superficie Q. Per come é stata costruita, una retta del tipo R_p si interseca con ogni altra retta del tipo D_q proprio nel punto $s(p, q)$.

In conclusione abbiamo che Q é una superficie doppiamente rigata, cioé ha due sistemi di generatrici, un sistema é costituito dalle rette $\{R_p\}$, l'altro dalle rette $\{D_q\}$. Inoltre due rette dello stesso sistema non si intersecano mai, e una retta di un sistema interseca tutte le rette dell'altro sistema, ognuna in un punto. Pensando all'isomorfismo $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, queste rigature provengono dalle due proiezioni $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.
Vediamo ora un altro modo per costruire la quadrica di rango quattro.

Lemma 9. *Siano D_1, D_2, D_3 tre rette due a due sghembe di $\mathbb{P}^3$, allora per ogni punto $p \in D_1$ esiste una ed un'unica retta, R_p, passante per p e intersecante D_2 e D_3.*

Dimostrazione:
Sia $p \in D_1$, prendiamo il piano H_3 contente la retta D_3 e il punto p. Allora H_3 interseca la retta D_2 in un punto che chiamiamo p_2, prendiamo come $R_p =< p, p_2 >$; tale retta é tutta contenuta in H_3 ció significa che esiste un punto $p_= R_p \cap D_3$. Infatti anche $D_3 \subset H_3$. Andiamo a vedere l'unicitá. Supponiamo che esistano due rette, R_p, R'_p, siffatte. Consideriamo il piano Π contenente le due rette; allora Π interseca la retta D_2 in due punti, che sono le intersezioni rispettivamente di R_p, R'_p con D_2, ció significa che $D_2 \subset \Pi$, ma per lo stesso motivo anche $D_3 \subset \Pi$; assurdo. □

Consideriamo ora la superficie, S, formata dalle rette del tipo R_p al variare di $p \in D_1$. Si riesce a dimostrare che la superficie S é una quadrica liscia. Per ora ci accontenteremo di vedere che effettivamente riusciamo a trovare all'interno di questa superficie due schiere di rette sghembe tra loro. Infatti per come é stata costruita S, la retta $D_1 \subset S$. Ma per l'unicitá delle rette R_p, si ha che anche le rette D_2, D_3 appartengono a S, in quanto possiamo ripetere la costruzione pertendo da una a caso delle rette D_i. Ne segue che prendendo un'altra retta, D_4, tale che D_1, D_2, D_4 sono sghembe due a due, si ha che $D_4 \subset S$. Cosí facendo ho trovato un'altra schiera di rette due a due sghembe, tutte contenute in S e diverse dalle rette R_p.

Il piano tangente

Proposizione 28. *Sia $z \in Q$, quadrica liscia, il piano tangente in z a Q é il piano generato dalle due generatrici che passano per z: se $z = s(p, q)$, allora $T_zQ =< R_p, D_q >$.*

Dimostrazione:
Il piano tangente a Q in z, T_zQ, deve contenere le direzioni tangenti a tutte le curve $C \subset Q$, passanti per z. In particolare se $z = s(p, q)$, allora T_zQ deve contenere R_p, D_q, poiché R_p e D_q hanno direzioni differenti si ha che $T_zQ =< R_p, D_q >$. □

Osservazione 14. *Da questa proposizione, ne segue che il piano tangente non é costante lungo la generatrice, contrariamente a quanto succedeva al cono quadrico. Infatti supponiamo T_zQ costante lungo la generatrice R_p, ($z = s(p, q)$). Sia $z' \in R_p$, con $z' \neq z$; allora $z' = s(p, q')$ con $q' \neq q$. Si ha che $T_{z'}Q =< R_p, D_{q'} >=< R_p, D_q >$; assurdo in quanto $D_q, D_{q'}$ sono sghembe e non possono dunque appartenere allo stesso piano. Pertanto al variare di $z \in R_p$, i piani*

tangenti a Q in z, rappresentano un $\mathbb{P}^1$ di piani tutti diversi tra loro ma aventi in comune la retta R_p; ovvero rappresenteno il fascio di piani per R_p.

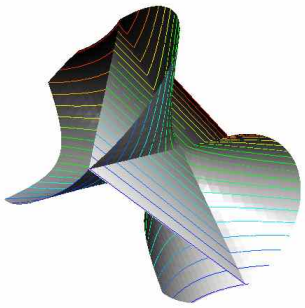


Figura 4.3: Quadrica liscia e un suo piano tangente.

Proposizione 29. *Se H é un piano di $\mathbb{P}^3$ allora abbiamo due possibilitá: o H é tangente a Q in un punto e in questo caso $H \cap Q$ é l'unione delle due generatrici di Q che passano per quel punto; oppure $H \cap Q$ é una conica liscia.*

Dimostrazione:
La superficie Q é di secondo grado e irriducibile, allora ogni piano interseca tale superficie in una curva di secondo grado, ovvero in una conica. Se il piano contiene una generatrice, allora questo piano appartiene al fascio dei piani passanti per la generatrice, ció significa che esiste un'altra generatrice nell'altra schiera di rette che appartiene al piano. Si esclude cosí il caso che Q intersecato con un piano H sia una retta doppia. Se invece H non contiene rette di Q allora necessariamente é una conica liscia. □

Proposizione 30. *La quadrica liscia é una superficie razionale.*

Dimostrazione:
Sia $Q \in \mathbb{P}^3$ una quadrica liscia. Proiettando Q da un suo punto O su un piano H_0 si ottiene un morfismo birazionale $\pi : Q - - > H_0 \cong \mathbb{P}^2$. Infatti se $p \in Q, p \neq O$, la retta $< O, p >$ interseca H_0 nel punto $\pi(p)$, viceversa se $x \in H_0$, la retta $< x, O >$, se non contenuta in Q, interseca Q nei soli due punti O e $\pi^{-1}(x)$. Infatti se prendiamo un piano che contiene tale retta questo interseca Q in una conica piana C. Ora C e $< O, x >$ o si intersecano in al piú due punti, o la retta é tutta contenuta nella conica. Se la retta $< O, x >$ é contenuta in Q, allora é una delle generatrici di Q che passano per O. Se R é una delle generatrici che passano per O, allora é chiaro che per ogni $y \in R$ si ha

che $\pi(y) = a$, dove $a = H_0 \cap R$.
Quindi la proiezione $\pi : Q - - > H_0$ stabilisce una corrispondenza biunivoca con delle eccezioni, ovvero non tutti i punti di Q sono in corrispondenza biunivoca con i punti di H_0. Infatti i punti di Q che stanno sulle generatrici R, D passanti per O hanno la stessa immagine, data dall'intersezione di R, D con H_0. Ci sono dunque due punti eccezionali su H_0: $a = H_0 \cap R$ e $b = H_0 \cap D$. Mentre su Q l'immagine del punto O, non é ben definita. □

4.4 Sistemi di coniche con due punti base

Consideriamo il sistema, δ delle coniche di $\mathbb{P}^2$ passanti per i punti a, b. Tale sistema ha dimensione tre in quanto stiamo ponendo a tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$ il passaggio per due punti. Supponiamo $a \neq b$ e sia $(f_0, ..., f_3)$ una base di δ. Il sistema δ induce un morfismo
$\varphi : \mathbb{P}^2 - - - > \mathbb{P}^3 : x \longmapsto (f_0(x) : f_1(x) : f_2(x) : f_3(x))$. Tale morfismo non é definito ovunque in quanto δ ammette punti base, dunque é solo un'applicazione razionale su $\mathbb{P}^2$. Per avere un morfismo, scoppiamo i punti base di δ.

Sia dunque $p : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ nei punti a, b. Indichiamo con A, B i due divosori eccezionali e con $\tilde{L}$ la trasformata stretta della retta $L =< a, b >$; sia $\Delta = p^*\delta - A - B$ il sistema "trasformato" di δ.

Proposizione 31. *Il sistema Δ é senza punti base.*

Dimostrazione:
Al di fuori dei divisori eccezionali questo é chiaro, per far vedere ció sui divisori eccezionali é sufficiente dimostrare che non tutte le coniche passanti rispettivamente per a e b hanno la stessa direzione tangente. Siano L, L_1 due rette distinte passanti per a. Allora le coniche $\tilde{L}L, \tilde{L}L_1$ hanno direzioni tangenti differenti in a. In modo analogo si dimostra anche per b. □

Il sistema Δ definisce dunque un morfismo $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^3$.

Proposizione 32. *Il morfismo $\hat{\varphi}$ contrae la curva $\tilde{L}$.*

Dimostrazione:
Una conica C in δ interseca L in due punti ma queste due intersezioni sono i punti a, b e quindi le due intersezioni scompaiono dopo lo scoppiamento. Pertanto $\hat{\varphi}(\tilde{L})$ non puó essere una curva in quanto avrebbe grado zero. Perché i punti di intersezione di $\tilde{C}$ con $\tilde{L}$ equivalgono ai punti di intersezione di $\hat{\varphi}(\tilde{L})$ con un piano generico di $\mathbb{P}^3$. Essendo $\hat{\varphi}(\tilde{L})$ irriducibile, é un punto di $p \in \mathbb{P}^3$. □

Questa proposizione ci dice che a differenza di quanto visto nei casi precedenti $\hat{\varphi}$ non é un'immersione, in quanto non é iniettivo. Possiamo rimediare a questo con la seguente proposizione:

Proposizione 33. *Il morfismo $\hat{\varphi}$ é un'immersione al di fuori della curva $\tilde{L}$.*

Dimostrazione:
Questo é equivalente a dimostrare due cose:
i) il sistema Δ separa i punti al di fuori di $\tilde{L}$;
ii) il sistema Δ separa e i vettori tangenti al di fuori di $\tilde{L}$.
Dimostriamo i):
Questo é chiaro al di fuori dei divisori eccezionali in quanto vale in δ. Siano dunque p, q due punti sui divisori eccezionali A, B che non stanno su $\tilde{L}$. Supponiamo $p \in A$ e $q \in B$. Devo dunque trovare una curva di Δ passante per p ma non per q; ció é equivalente a trovare una curva del sistema δ avente p come direzione tangente in a e una direzione tangente in b diversa da q. Siano P, Q le rette passanti rispettivamente per a e b con direzioni tangenti p, q e sia R una retta passante per b differente da Q. La conica formata dalle rette P, R soddisfa le mie condizioni. Supponiamo invece che i due punti p, q stiano sullo stesso divisore eccezionale, A. Consideriamo le rette P, Q passanti per a con p, q le rispettive direzioni tangenti e sia R una retta passante per b diversa da $\tilde{L}$, allora la conica formata dalle retta P, R soddisfa le mie condizioni.
Dimostriamo ii):
Ció é chiaro al di fuori dei divisori eccezionali. Per mostrarlo sui divisori eccezionali utilizziamo il criterio di molta ampiezza. Sia x un punto sul divisore eccezionale A, che non appartiene a $\tilde{L}$, e sia Q una conica di δ che abbia x come direziona tangente in a. Sia C la conica formata dalle rette X con direzione x in a e da una retta passante per b diversa da $\tilde{L}$. Poiché C ha contatto esattamente uguale a due con Q allora Δ separa i vettori tangenti in A. Analogamente si vede in B. □

Le rette per il punto a diventano sghembe dopo lo scoppiamento, cosí come le rette per il punto b; se $R \neq L$ é una retta per a e se $D \neq L$ é una retta per b, allora $\tilde{R} \cap \tilde{D}$ é un punto. Inoltre $\hat{\varphi}(\tilde{R})$ é una retta cosí come $\hat{\varphi}(\tilde{D})$. Infatti una conica di δ interseca R in due punti, uno dei quali é a, ma quest'ultima intersezione vá persa nello scoppiamento.
I divisori eccezionali A, B hanno per immagine le rette che si intersecano nel punto p, perché $\tilde{L}$ li interseca entrambi. Inoltre A non interseca alcuna retta che sia la trasformata stretta di una retta passante per b diversa da $\tilde{L}$, in quanto l'unica retta passante per a, b é L. In modo del tutto analogo, B non interseca

alcuna retta che sia la trasformata stretta di una retta passante per a diversa da $\tilde{L}$.

Notiamo quindi che in $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ convivono due rette di schiere: quelle passanti per il punto a (piú il divisore eccezionale B), che in $\hat{\mathbb{P}}$ sono sghembe e dunque rimangono tali anche in $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ e quelle passanti per il punto b (piú il divisore eccezionale A), che per lo stesso motivo sono tutte sghembe tra loro in $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$.

Proposizione 34. *La superficie $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ ha grado due ed é una quadrica di $\mathbb{P}^3$. Inoltre tale superficie é liscia.*

Dimostrazione:
Per capire il grado di $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$, contiamo i punti di intersezione tra la superficie e due piani generici, H e H' di $\mathbb{P}^3$. Ció é equivalente a trovare i punti di intersezione tra due curve di Δ. Due coniche di δ si intersecano in quattro punti, due dei quali sono a, b, ma dopo lo scoppiamento l'intersezione su questi punti scompare e dunque due curva generiche di Δ si intersecano in due punti. La superficie $Q = \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ ha grado due; inoltre contiene due schiere di rette tali che, tutte le rette di una schiera sono sghembe tra di loro, ed una retta di una schiera incontra tutte le rette dell'altra schiera in un punto, ció significa che Q é una quadrica liscia. □

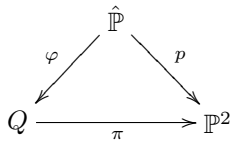
Osservazione 15. *Il morfismo $\hat{\varphi}$ contrae la retta $\tilde{L}$ in un punto, O, che risulta liscio per l'immagine. Questo é dovuto al fatto che $\hat{\varphi}$ é lo scoppiamento di Q nel punto O. In particolare lo scoppiamento di Q in un punto é isomorfo allo scoppiamento di due punti di $\mathbb{P}^2$.*

Dimostrazione:
Vogliamo dunque dimostrare che esiste un isomorfismo tra la superficie dello scoppiamento di due punti di $\mathbb{P}^2$ e la superficie dello scoppiamento di un punto delle quadrica liscia che indichiamo con Q. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \hat{Q} \setminus \{E \cup \tilde{R} \cup \tilde{D}\} & \xrightarrow{\psi} & \hat{\mathbb{P}} \setminus \{A \cup B \cup \tilde{L}\} \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Q \setminus \{R \cup D\} & \xrightarrow[\pi]{} & \mathbb{P}^2 \setminus \{L\} \end{array}$$

Dove π é la proiezione di Q dal punto O su $\mathbb{P}^2$, p, p' sono i rispettivi scoppiamenti, E é il divisore eccezionale di O e $\tilde{R}, \tilde{D}$ le trasformate strette delle generatrici R, D passanti per O. Definiamo poi il morfismo $\psi := p^{-1} \circ \pi \circ p'$. Notiamo che p, p', π con le rispettive restrizioni evidenziate nel diagramma sono

tutti isomorfismi, dunque anche ψ é isomorfismo. Vogliamo estendere ψ anche a $\tilde{L}, A, B$ definendo:
-$\psi(\tilde{R}) = A$,
-$\psi(\tilde{D}) = B$,
-$\psi(E) = \tilde{L}$.
Notiamo che questa sono buone definizioni in quanto $\psi(\tilde{R}) = p^{-1} \circ \pi \circ p'(\tilde{R}) = p^{-1}(\pi(R)) = p^{-1}(a) = A$ e in modo analogo si vede anche per B. Mentre per $\psi(E)$, la questione é meno immediata in quanto non é definito $\pi(O)$. Peró se noi prendiamo in considerazione l'osservazione fatta precedentemente possiamo considerare la retta $L =< a, b >$ come la rappresentante dei punti dell'intorno del primo ordine di O. In questo caso, in modo non rigoroso, possiamo scrivere che $\psi(E) = p^{-1} \circ \pi \circ p'(E) = p^{-1}(\pi(O)) = p^{-1}(L) = \tilde{L}$.
Abbiamo dunque dimostrato che le superfici $\hat{\mathbb{P}}$ e $\hat{Q}$ sono isomorfe, inoltre, poiché φ rende commutativo il diagramma:



si ha che, a meno di isomorfismi, φ rappresenta lo scoppiamento di un punto di Q. □

Osservazione 16. *Da questo punto di vista le due generatrici che passano per O, (dove con O indichiamo $\hat{\varphi}(\tilde{L})$), sono le immagini attraverso $\hat{\varphi}$ dei divisori eccezionali. Il punto O rappresenta il punto della quadrica dal quale abbiamo proiettato.*

Osservazione 17. *Se R, D sono le generatrici passanti per O allora $T_O = T_O Q =< R, D >$. Si ha che $\pi^{-1}(a) = R, \pi^{-1}(b) = D$, mentre i punti della retta $< a, b >$ sono i punti di $T_O Q \cap H_0$ e corrispondono ai punti dell'**intorno del primo ordine di** O.*

Sapendo che la quadrica liscia é una superficie razionale e dunque birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2$, vogliamo trovare un sistema, che ci permetta di capire a priori, se tale superficie derivi da un sitema di curve di $\mathbb{P}^2$; ovvero se esiste una rappresentazione piana della superficie. L'idea é quella di andare a studiare le sezioni iperpiane. Infatti per una quadrica liscia Q si riesce a dimostrare che:

Proposizione 35. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra le sezioni piane di*

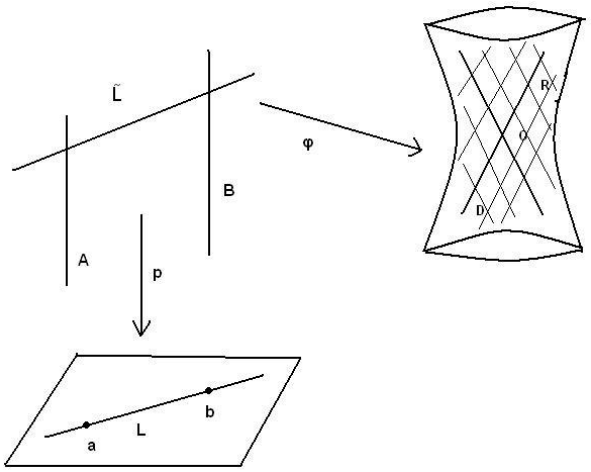


Figura 4.4: Scoppiamento di un punto sulla quadrica liscia

Q e le curve del sistema lineare, δ, delle coniche di un piano di $\mathbb{P}^3$ che passano per due punti.

Dimostrazione:
Sia $Q \in \mathbb{P}^3$ una quadrica liscia. Proiettando Q da un suo punto O su un piano H_0 si ottiene un morfismo birazionale $\pi : Q - - > H_0 \cong \mathbb{P}^2$. Indichiamo con R, D le generatrici di Q che passano per O. Sia $H \in \mathbb{P}^3$ un piano generico, allora $H \cap Q$ é una conica K. Quindi $\pi(K)$ é una conica del piano H_0 (essendo H generico $O \notin K$). La conica $\pi(K)$ non é generica: infatti H incontra la generatrice R, in un punto $H \cap R = \{x\}$, quindi $x \in K$ e $\pi(K)$ passa per il punto $\pi(x) = R \cap H_0 = a$. In modo analogo si osserva che $\pi(K)$ passa per il punto b. Indichiamo dunque con δ il sistema lineare delle coniche che passano per i punti a, b. Se $C \in H_0$ é una conica di δ e se $x, y, z \in C$ sono generici, allora i tre punti $\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y), \pi^{-1}(z)$ generano un piano H che interseca Q lungo la conica K. Inoltre $\pi(K) = C$ in quanto $\pi(K)$ passa per i punti a, b, x, y, z di C. (Ricordiamo che per cinque punti di $\mathbb{P}^2$ passa una ed una solo conica.) □

Con lo studio delle sezione iperpiane di una superficie razionale si riesce a dimostrare che ogni superficie razionale ha una rappresentazione piana.

Curve su una quadrica liscia.

Una curva $C \subset Q$ puó essere vista come la trasformata stretta di una curva piana $P \subset \mathbb{P}^2$. La curva C in generale intersecherá la retta L in d punti distinti. Siccome $\tilde{L}$ viene contratta nel punto O, $\hat{\varphi}(\tilde{P})$ avrá una singolaritá nel punto O. C'é peró un'eccezione a questo comportamento ed é quando l'intersezione di P

con L é concentrata nei soli punti a, b. Supponiamo quindi che P abbia una singolaritá (ordinaria per semplificare) di molteplicitá r in a ed una (sempre ordinaria) di molteplicitá $d-r$ in b. Supponiamo inoltre che queste siano le uniche singolaritá di P. La trasformata stretta di P é liscia e interseca A in r punti distinti e B in $d-r$ punti distinti. Se D é una retta passante per a, allora P interseca D in $d-r$ punti distinti oltre ad a se invece R é una retta passante per b, P interseca R in r punti distinti diversi da b. Siccome $\tilde{P}$ é liscia, allora anche $C = \hat{\varphi}(\tilde{P})$ é liscia in quanto $\hat{\varphi}$ é un'immersione al di fuori di $\tilde{L}$ e $\tilde{L} \cap \tilde{P} = \varnothing$. Ne segue che la curva C interseca ogni retta di una schiera in $d-r$ punti e ogni retta dell'altra schiera in r punti.

Definizione 16. *Nel contesto sopra citato si dice che $(r, d-r)$ é il **bigrado** della curva C, (si ha $deg(C) = d$).*

Si puó inoltre dimostrare la seguente:

Proposizione 36. *Se $C \subset Q$ é una curva su Q, esistono due interi m, n tali che C intersechi ogni generatrice di una schiera in m punti ed ogni generatrice dell'altro sistema in n punti. Inoltre $deg(C) = m + n$.*

Dimostrazione:
Sia $C \subset Q$ una curva di grado d. Sia D una retta di Q che interseca la curva C in m punti. Consideriamo il piano generato dalle rette R, D, dove R é una retta che non appartiene alla schiera di D. Poiché $card(H \cap C) = d$ si ha che $card(C \cap R) = d - m$. Sia $n = d - m$, vogliamo mostrare che ogni retta che appartiene alla stessa schiera di R interseca la curva C in n punti. Sia R_1 una retta che appartiene alla stessa schiera di R, supponiamo $card(R_1 \cap C) = n_1 \neq n$. Prendiamo ora il piano H_1 generato dalle R_1, D, $card(H_1 \cap C) = m + n_1 \neq d$, ma questo é assurdo ció significa che tutte le rette della schiera di R intersecano la curva in n punti. In modo analogo si puó vedere con tutte le rette che appartengono alle schiera di D. □

Vogliamo ora mostrare che anche il cono quadrico ammette una rappresentazione piana. Cerchiamo quindi di capire meglio chi sono le proiezioni in $\mathbb{P}^2$ delle sezioni iperpiane del cono. Poiché abbiamo dimostrato all'inizio che una sezione iperpiana rappresenta una curva del sistema dal quale partiamo. Per fare questo é possibile dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 37. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra le sezioni iperpiane del cono che non passano per il vertice e le coniche non singolari di $\mathbb{P}^2$ che passano per un punto con direzione tangente assegnata.*

Dimostrazione:
Sia Q un cono quadrico e p un punto diverso dal vertice dal quale facciamo la proiezione π come nella proposizione precedente. Sia poi $H \in \mathbb{P}^3$ un piano generico non passante per il vertice, allora $H \cap Q$ é una conica K. Quindi $\pi(K)$ é una conica del piano H_0 (essendo H generico $p \notin K$). La conica $\pi(K)$ non é generica: infatti H incontra la generatrice f passante per p, in un punto $H \cap f = \{x\}$, quindi $x \in K$ e $\pi(K)$ passa per il punto $\pi(x) = R \cap H_0 = a$. Inoltre la conica K ha una direzione tangente sul piano tangente a Q in p, dunque $\pi(K)$ avrá come direzione tangente la retta $r = T_pQ \cap H_0$. Indichiamo dunque con δ il sistema lineare delle coniche che passano per il punto a con tangente r. Se $C \in H_0$ é una conica non singolare di δ e se $x, y, z \in C$ sono generici, allora i tre punti $\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y), \pi^{-1}(z)$ generano un piano H che interseca Q lungo la conica K. Inoltre $\pi(K) = C$ in quanto $\pi(K)$ passa per i punti a, x, y, z e ha direzione tangente assegnata in a uguale a quella di C. □

Detto questo andiamo dunque a studiare il sistema lineare formato dalle coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per un punto dato, con direzione tangente assegnata. Ció é equivalente a studiare tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per due punti infinitamente vicini.

Sia δ il sistema lineare delle coniche di $\mathbb{P}^2$ che passano per a con direzione tangente x. Tale sistema ha dimensione tre, in quanto stiamo mettendo due condizioni sul sistema di tutte le coniche. Sia $(f_0, ..., f_3)$ una base di δ, il morfismo φ associato risulta essere: $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 : x \to (f_0(x) : ... : f_3(x))$. Chiaramente il morfismo φ non é definito ovunque in quanto δ ammette un luogo base formato dal punto a. Come siamo soliti fare in questi casi, per estendere φ ovunque, estendiamo il dominio di partenza scoppiando in punto a. Indichiamo con p' lo scoppiamento, con A il divisore eccezionale e con $\hat{\mathbb{P}}'$ la superficie dello scoppiamento. Sia $\Delta' := p'^*(C) - A$ con $C \in \delta$. Tale sistema a differenza delle situazioni precedenti ammette ancora un punto base. Infatti tutte le coniche di δ hanno la stessa direzione tangente x, e dunque tutte le curve di Δ' passano per il punto $x \in A$; come si nota nella figura 4.5

Il morfismo φ' dato dall'estensione di φ sulla superficie dello scoppiamento chiaramente non puó essere definito ovunque perché Δ' ammette un punto base. In conclusione anche dopo uno scoppiamento non riesco a risolvere il mio problema. A questo punto facciamo un nuovo scoppiamento, del punto $x \in \hat{\mathbb{P}}'$, otteniamo una nuova superficie che indicheremo con $\hat{\mathbb{P}}$. Indichiamo con p lo scoppiamento, con E il nuovo divisore eccezionale e con $\Delta := p^*(C) - E$ con $C \in \Delta'$.

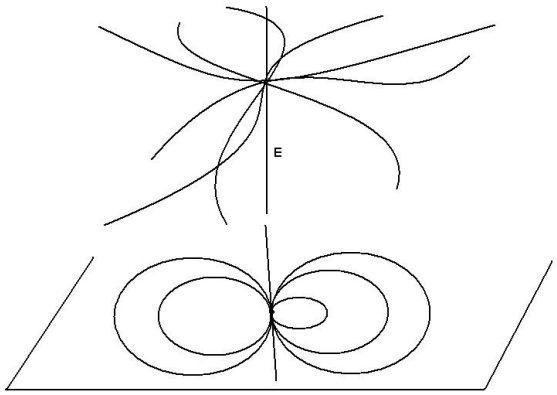


Figura 4.5: Come si presenta il sistema lineare δ dopo un primo scoppiamento.

Osservazione 18. *Notiamo che la superficie $\hat{\mathbb{P}}'$ é birazionalemente equivalente a $\mathbb{P}^2$ ma anche alla superficie $\hat{\mathbb{P}}$. Dunque anche $\hat{\mathbb{P}}$ é birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2$. Inoltre poiché*

$$\hat{\mathbb{P}} \setminus \{E \cup \tilde{A}\} \xrightarrow{p} \hat{\mathbb{P}}' \setminus \{A\} \xrightarrow{p'} \mathbb{P}^2 \setminus \{a\}$$

sono tutti isomorfismi allora l'applicazione $\psi := p' \circ p$ é un isomorfismo ristretta a $\hat{\mathbb{P}} \setminus \{E \cup \tilde{A}\}$, dove con $\tilde{A}$ indichiamo la trasformata stretta del divisore eccezionale A rispetto allo scoppiamento p.

Proposizione 38. *Il sistema lineare Δ non ammette punti base.*

Dimostrazione:
Questo é chiaro al di fuori di $E \cup \tilde{A}$, per farlo vedere anche su $\tilde{A} \cup E$ ció significa che devo trovare due curve $\tilde{C}', \tilde{D}'$ di Δ' che hanno direzione tangente differente, dove $\tilde{C}'$ e $\tilde{D}'$ sono le trasformate strette delle curve $C, D \in \delta$. Siano $C, D \in \delta$ due coniche che hanno esattamente contatto due in a, grazie al criteri di molta ampiezza le rispettive curve $\tilde{C}'$ e $\tilde{D}'$ hanno direzione tangente differente in A. Dunque Δ é senza punti base. □

Questa proposizione ci permette di asserire che il morfismo $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^3$, che é l'estensione di φ a $\hat{\mathbb{P}}$, é ben definito.

Proposizione 39. *Il morfismo $\hat{\varphi}$ contrae la curva $\tilde{A}$.*

Dimostrazione:
Vogliamo mostrare che la curva $\hat{\varphi}(\tilde{A})$ non ha grado. Consideriamo una sezione iperpiana di $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$; ció equivale a prendere una curva $\tilde{C} \in \Delta$. Vogliamo quindi dimostrare che $\tilde{C} \cap \tilde{A} = \varnothing$. Indichiamo con $\tilde{C}' = p(\tilde{C})$, allora devo dimostrare

che $\tilde{C}'$ ha direzione tangente differente rispetto ad A, ovvero che $\tilde{C}'$ non é tangente ad A. Ma ció é sempre vero in quanto ogni curva di δ ha singolaritá al massimo ordinarie in a e quindi la molteplicitá di intersezione con il divisore eccezionale A é al massimo uno. Abbiamo dunque che in generale $\tilde{C} \cap \tilde{A} = \varnothing$ e quindi $\hat{\varphi}(\tilde{A})$ ha grado zero e poiché é una varietá irriducibile si riduce ad un punto che indicheremo con O. □

Osservazione 19. *A questo punto osserviamo che il morfismo $\hat{\varphi}$ contrae anche $\tilde{r}$, dove r è la retta di $\mathbb{P}^2$ che passa per a con direzione tangente x. In effetti si può mostrare, usando il criterio di Castelnuovo, che $\tilde{r}$ è il ivisore eccezionale di uno scoppiamento, ossia $\hat{\varphi} = f \circ q$ dove q è lo scoppiamento di una superficie liscia e dove f contrae l'immagine di $\tilde{A}$*

Proposizione 40. *La superficie $S = \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ é irriducibile e ha grado due.*

Dimostrazione:
La superficie S é birazionalmente equivalente alla superficie $\hat{\mathbb{P}}$ che é irriducibile; dunque anche S é irriducibile.
Andiamo a calcolare il grado di S contando i punti di intersezione di due curva $\tilde{C} \in \Delta$ che dopo il morfismo rappresentano due sezioni iperpiane di S. Partiamo da due curve $C_1, C_2 \in \delta$, queste si intersecano in quattro punti contati con molteplicitá, piú precisamente si intersecano in tre punti uno dei quali é a che viene contato due volte. Dopo il primo scoppiamento le trasformate strette $\tilde{C_1}, \tilde{C_2}$ si intersecano in tre punti, contati con molteplicitá, uno dei quali é x. Infine dal momento che x verrá a sua volta scoppiato le nuove trasformate strette $\tilde{C_1}, \tilde{C_2}$, si intersecheranno in soli due punti. Deduciamo che la superficie S ha grado due. □

Abbiamo nuovamente una superficie di grado due in $\mathbb{P}^3$, cerchiamo di capire di cosa si tratta e cosa rappresente il punto O per S.

Proposizione 41. *L'immagine del divisore eccezionale E attraverso $\hat{\varphi}$ é una retta.*

Dimostrazione:
Vogliamo dimostrare che $\hat{\varphi}(E)$ é una retta. Prendiamo una sezione iperpiana di S e contiamo quanti sono i punti di intersezione ammette con $\hat{\varphi}(E)$. Ció é equivalente a contare i punti di intersezione tra E e la curva $\tilde{C}$ che rappresenta la sezione iperpiana data. Notiamo che $card(\tilde{C} \cap E) = 1$ in quanto la trasformata della generica conica del sistema incontra chiaramente E in un unico punto.

□

Lemma 10. *Tutte le rette di $\mathbb{P}^2$ che passano per a, eccetto la retta avente direzione tangente x, hanno per immagini delle rette che passano per $O = \hat{\varphi}(\tilde{A})$.*

Dimostrazione:
Sia R una retta passante per a con direzione tangente diversa da x. Dopo il primo scoppiamento $\tilde{R}'$, la trasformata stretta di R, interseca A in un punto e una generica curva del sistema in un punto. Infatti R interseca una generica curva del sistema in due punti uno dei quali è a. Dopo il secondo scoppiamento $\tilde{R}$ (la trasformata stretta di $\tilde{R}'$), interseca$\tilde{A}$ sempre in un punto, come per una generica curva del sistema. Pertanto R ha per immagine una retta. □

Proposizione 42. *La superficie S é un cono di vertice O.*

Dimostrazione:
Sappiamo che la superficie S é una quadrica irriducibile di $\mathbb{P}^3$. Quindi S o é una quadrica liscia o é un cono. Dal momente che esistono infinite rette passanti per O, S é un cono. □

Capitolo 5

Sistemi di cubiche

In questo capitolo vogliamo approffondire lo studio di superfici razionali date a partire da sistemi di cubiche in $\mathbb{P}^2$. Procederemo in modo analogo a quanto fatto nel capitolo precedente, soffermandoci con piú attenzione nello studio della superficie cubica liscia di $\mathbb{P}^3$, che si ottiene da un sisitema di cubiche di $\mathbb{P}^2$ avente sei punti base di cui non tre allineati e non sei in una conica.

5.1 Sistemi di cubiche senza punti base

Sia δ il sistema lineare delle cubiche di $\mathbb{P}^2$. Ogni cubica di $\mathbb{P}^2$ la possiamo scrivere come un poliomio omogeneo di grado tre. Per questo motivo la dimensione di δ é ugule alla dimensione proiettiva di S_3, dove con S_3 indichiamo lo spazio vettoriale dei polinomi di grado tre. Grazie al lemma (4) sappiamo che la dimensione di $\mathbb{P}(S_3) = \frac{(3+1)(3+2)}{2} - 1 = 9$, quindi $dim(\delta) = 9$. Infatti ogni cubica di $\mathbb{P}^2$ puó essere scritta come combinazione lineare dei seguenti monomi: $x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_1^2x_0, x_1^2x_2, x_2^2x_0, x_2^2x_1, x_0x_1x_2$ che rappresenteno una base di δ. Il sisitema δ é senza punti base e induce un morfismo $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^9 : x \longmapsto (f_0(x) : ..., f_9(x))$ dove con $(f_0, ..., f_9)$ indichiamo una base di δ. Per quanto dimostrato nel capitolo tre, tale morfismo é un'immersione e la superficie $S = \varphi(\mathbb{P}^2)$ ha grado 9. Infatti, dal momento che una sezione iperpiana di S rappresenta una curva del sistema lineare, e poiché φ é un'immersione, allora il grado di S é dato dal numero di punti di intersezione di due cubiche di $\mathbb{P}^2$. Osserviamo inoltre che la superficie S é isomorfa a $\mathbb{P}^2$, ed é quindi una superficie liscia e razionale di $\mathbb{P}^9$.

Definizione 17. *La superficie S é detta superficie di* ***Veronese*** *delle cubiche.*

Solitamente si indica con $V_{2,3}$ che sta ad indicare che é data da un sistema lineare di curve di $\mathbb{P}^2$ di grado tre.

In generale ogni superficie che é data a partire da un sistema lineare completo di curve senza punti base, in $\mathbb{P}^n$ di grado d é detta superficie di Veronese e si é soliti indicarla con $V_{n,d}$. Il morfismo φ indotto da tale sistema lineare viene chiamato **d-uple embedding**.

Proposizione 43. *Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva di grado d allora $\varphi(C)$ é una curva di grado $3d$. In particolare $V_{2,3}$ non contiene rette e coniche.*

Dimostrazione:
Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^3$, allora $H \cap \varphi(C) = H \cap V_{2,3} \cap \varphi(C)$. Ora $H \cap V_{2,3}$ é una sezione iperpiana di $V_{2,3}$ e rappresenta l'immagine di una curva $X \in \delta$. Poiché φ é un'immersione, possiamo dire che $card(\varphi(X) \cap \varphi(C)) = card(X \cap C) = 3d$. Supponiamo che esista una retta $R \in V_{2,3}$, indichiamo con $\varphi(C)$ una sezione iperpiana di $V_{2,3}$, allora $card(R \cap \varphi(C)) = 1$, ovvero $card(\varphi^{-1}(R) \cap C) = 1$. Assurdo in quanto C ha grado tre. Ragionando in modo analogo vediamo che in $V_{2,3}$ non esiste alcuna conica. □

Diretta conseguenza di questa proposizione é quanto segue:

Proposizione 44. *Dati due punti p e q di $V_{2,3}$, esiste una cubica liscia contenuta in $V_{2,3}$ che passa per p e q. Piú precisamente $V_{2,3}$ é ricoperta da una famiglia di dimensione due di cubiche lisce.*

Dimostrazione:
Siano $p, q \in V_{2,3}$, poiché φ é isomorfismo sull'immagine allora esistono $P', q' \in \mathbb{P}^2$ tali che $p = \varphi(p')$ e $q = \varphi(q')$. Consideriamo la retta R passante per i punti p', q'. Si ha che $\varphi(R)$ é una curva di´contenuta in $V_{2,3}$ di grado tre. Inoltre tale curva é liscia in quanto φ é un'immersione. Pertanto $V_{2,3}$ é ricoperta da una famiglia di cubiche lisce, tale famiglia ha dimensione due in quanto sono in corrispondenza biunivoca con tutte le rette di $\mathbb{P}^2$, che non sono altro che i punti del duale di $\mathbb{P}^2$, che ha dimensione due. □

5.2 Sistemi di cubiche con punti base

Analizziamo in generale cosa succede per sistemi di cubiche che ammettono punti base. Sia δ un sistema lineare di curve di $\mathbb{P}^2$, che ammette $P_1, .., P_r$ punti base. Sia $p : \mathbb{P}^2 \to \hat{\mathbb{P}}$ lo scoppiamento di $P_1, ..., P_r$, dove indichiamo con $\hat{\mathbb{P}}$, la

superficie ottenuta dopo lo scoppiamento e con $E_1, ..., E_r$ i divisori eccezionali. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di δ e gli elementi di $\Delta := p^*(C) - E_1 - ... - E_r$ con $C \in \delta$.

Definizione 18. *Chiamiamo* ***punto base non assegnato di*** δ*, un punto che é base per il sistema* Δ*.*

Definizione 19. *Diciamo che un sistema lineare* δ *é* ***molto ampio*** *se separa i punti e i vettori tangenti.*

Proposizione 45. *Sia* δ *il sistema lineare delle cubiche di* $\mathbb{P}^2$ *con punti base assegnati* $P_1, ..., P_r$ *tali che non quattro allineati e non sette sulla stessa conica. Allora se* $r \leq 7$*,* δ *non ha punti base non assegnati. Questo rimane vero anche nel caso in cui* P_1 *é infinitamente vicino a* P_2

Dimostrazione:

E' sufficiente considerare il caso in cui $r = 7$. Mostriamo prima che se $P_1, ..., P_7$ sono tutti punti ordinari, allora δ non ha punti base non assgnati ordinari. Per far questo basta mostrare che per ogni punto Q diverso da P_i per tutti gli i, esiste una cubica appartenente a δ che non passa per Q.

Caso 1. Supponiamo che esistano tre punti P_1, P_2, P_3 allineati con il punto Q sulla retta L. I punti P_4, P_5, P_6, P_7 non sono allineati quindi possiamo assumere che P_4, P_5, P_6 non siano allineati. Quindi la conica C_{12456} passante per i punti P_1, P_2, P_4, P_5, P_6, assieme alla retta L_{37} forma una cubica appartenente a δ e non passante per Q. Infatti se $Q \in C_{12456}$ avrei che la conica contiene la retta L, e sarebbe così riducibile, ma ciò significa che i punti P_4, P_5, P_6 devono essere allineati, assurdo.

Caso 2. Supponiamo che Q non sia allineato con ogni insieme di tre punti presi dai P_i, ma supponiamo che Q stia sulla conica C contenente $P_1, ..., P_6$. Chiaramente la conica C è irriduciobile altrimenti Q sarebbe allineato ad un nsieme di tre punti. Allora la cubica formata dalla conica C_{12347} e dalla retta L_{56} non contiene Q. Infatti se $Q \in C_{12347}$ allora si ha che $P_1, P_2, P_3, P_4, Q \in C \cap C_{12347}$ e dunque $C = C_{12347}$; ciò comporta che $P_1, ..., P_7$ siano tutti sulla stessa conica, assurdo. Se invece $Q \in L_{56}$, allora C sarebbe riducibile, assurdo.

Caso 3. Sia ora Q non allineato con tre punti dei P_i e supponiamo non sia su una conica con sei punti tra i P_i. Consideriamo allora le tre cubiche $K_i = C_{1234i} + L_{jk}$, dove $567 = ijk$. Vogliamo mostrare che una di queste cubiche non contiene Q. Se $Q \in L_{56}$ allora $Q \notin L_{57}$ e $Q \notin L_{67}$, perchè altrimenti dovrei avere P_5, P_6, P_7, Q sulla stessa retta. Possiamo assumere $Q \notin L_{57}$ e $Q \notin L_{67}$. Allora se $Q \in K_5$ e $Q \in K_6$ abbiamo che $Q \in C_{12345}$ e $Q \in C_{12346}$. Consideriamo la conica $C' = C_{1234Q}$ allora se questa é irriducibile si ha che le tre coniche sono

uguali e quindi $Q \in C_{123456}$, in contraddizione con le ipotesi. Se C' é riducibile, distinguiamo due casi : a) $C' = L_{123} + L_{4Q}$, b) $C' = L_{12Q} + L_{34}$. Nel caso a), $C_{12345} = L_{123} + L_{45}$ e $C_{12346} = L_{123} + L_{46}$, pertanto i punti P_4, P_5, P_6, Q sono allineati, assurdo. Nel caso b) $C_{12345} = L_{12} + L_{345}$ e $C_{12346} = L_{12} + L_{346}$ e quindi i punti P_3, P_4, P_5, P_6sarebbero allineati, assurdo.
La stessa argomentazione si applica nel caso in cui P_1 é infinitamente vicino a P_2. □

Corollario 1. *Con le stesse ipotesi della proposizione precedente abbiamo che:*
a) se $r \leq 8$ allora $dim(\delta) = 9 - r$;
b) se $r = 8$, allora $dim(\delta) = 1$ e quasi tutte le curva di δ sono irriducibili.

Dimostrazione:
Sappiamo che le cubiche senza punti base formano un sistema lineare di dimensione nove. Poiché per $r \leq 7$ il sistema lineare non ha punti base non assegnati, ció significa che ogni volta che aggiungo un punto base, aggiungo una condizione al sistema che diminuisce di uno i suoi gradi di libertá e dunque cala di uno la dimensione. Per $r = 8$ osserviamo che per nove punti in posizione generale passa una e una sola cubica quindi se togliamo uno di questi punti otteniamo un grado di libertá che ci permette di dire che la dimensione di tale sistema é uno. Questo prova il punto a). Per mostrare b) notiamo che esiste un numero finito di modo per far passare tre rette o una retta e una conica non singolare per otto punti di cui quattro non allineati e sette non su una conica. □

Corollario 2. *(**Paradosso di Cramer**) Dati otto punti $P_1, ..., P_8$ nel piano di cui quattro non allineti e sette non sulla stessa conica, esiste un unico punto P_9, tale che tutte le cubiche passanti per $P_1, .., P_8$ passano anche per il punto P_9.*

Dimostrazione:
Per il corollario precedente si ha che il sistema lineare δ delle cubiche passanti per i punti $P_1, ..., P_8$ ha dimensione uno. Scegliamo due curve irriducibili di δ C_1, C_2, per il teorema di Bezout queste si intersecano in nove punti, otto dei quali sono $P_1, ..., P_8$, quindi esiste un ulteriore punto di intersezione P_9. Poiché $dim(\delta) = 1$, ogni curva di δ la possiamo scrivere come combinazione lineare di C_1, C_2. Pertanto tutte le curve del sistema devono passare anche per P_9. Perció P_9 é un punto non assegnato di δ. □

In questo paragrafo vogliamo approfondire in modo particolare, il caso in cui il sistema lineare δ delle cubiche di $\mathbb{P}^2$ ammetta sei punti base. Per far ció andiamo prima a dimostrare alcuni importanti risultati generali.

Per il corollario 1 abbiamo che dato un sistema di cubiche, la dimensione di tale sistema cala di uno ogni volta che noi assegniamo un nuovo punto base (rispettando sempre la ipotesi sulla posizione dei punti). Per questo motivo si riesce a dimostrare la seguente equivalenza: se δ é un sistema lineare con punti base assegnati, il sistema lineare Δ che si ottiene a partire da δ dopo lo scoppiamento dei suoi punti base, é molto ampio se e solo se: a) δ non ha punti base non assegnati, b) Il sistema $\delta - P$ dato da tutte le curva di δ che passano anche per P non ha punti base non assegnati.

Teorema 7. *Sia δ il sistema lineare delle cubiche di $\mathbb{P}^2$ con punti base assegnati, $P_1, ..., P_r$, tali che non ce ne siano tre allineati e sei su una conica. Se $r \leq 6$, allora il corrispondente sistema lineare Δ, é molto ampio.*

Dimostrazione:
In accordo a quanto detto sopra mi basta dimostrare che δ non ha punti base non assegnati e che $\delta - P$ non ha punti base non assegnati. Il primo punto deriva direttamente dalla proposizione 47. Poiché tra i punti P_i non ce ne sono tre allineati e sei su una conica, allora i punti $P_1, ..., P_r, P$ soddisfano le ipotesi della proposizione 47, e cosí anche il secondo punto é dimostrato. □

Corollario 3. *Con le stesse ipotesi del teorema si ha che per $r = 0, 1, .., 6$ il sistema lineare Δ induce un'immersione $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^{9-r}$. In particolare la superficie $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ risulta essere liscia, razionale di grado $9 - r$.*

Dimostrazione:
Per il teorema precedente sappiamo che Δ é un sistema lineare molto ampio, quindi separa i punti e i vettori tangenti, questo mi permette di dire che induce un'immersione $\hat{\varphi} : \hat{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^{9-r}$ e in particolare la superficie $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ risulta essere liscia, razionale di grado $9 - r$. □

In particolare se abbiamo esattamente sei punti base il morfismo $\hat{\varphi}$ induce un'immersione da $\hat{\mathbb{P}}$ in $\mathbb{P}^3$, e la superficie $S = \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$ non é altro che una superficie cubica liscia di $\mathbb{P}^3$.
Da ora in poi concentreremo la nostra attenzione sul sistema δ delle cubiche di $\mathbb{P}^2$ con sei punti base $P_1, .., P_6$, tali che non ce ne siano tre allineati e sei su una conica. Indicheremo con $\hat{\varphi}$ il morfismo indotto da Δ, con $E_1, ..., E_6$ i divisori eccezionali, rispettivamente dei punti $P_1, ..., P_6$, e con $S := \hat{\varphi}(\hat{\mathbb{P}})$. Per quanto é stato detto precedentemente, $\hat{\varphi}$ é un'immersione e questo semplificherà spesso i nostri ragionamenti.

Lemma 11. *L'immagine di un divisore eccezionale attraverso $\hat{\varphi}$ é una retta.*

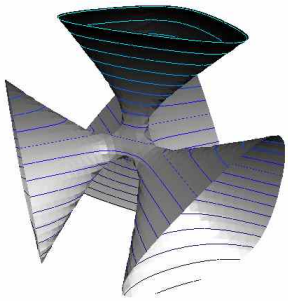


Figura 5.1: Superficie cubica liscia di Clebsch

Dimostrazione:
Consideriamo il divisore eccezionale E_1. Sia H un piano di $\mathbb{P}^3$, allora $H \cap S$ rappresenta l'immagine, attraverso $\hat{\varphi}$, di una curva $\tilde{C} \in \Delta$. Poiché $\hat{\varphi}$ é un'immersione, allora $card(H \cap \hat{\varphi}(E_1)) = card(\hat{\varphi}(E_1) \cap S \cap H) = card(\tilde{C} \cap E_1)$. Dal momento che la curva $\tilde{C}$ é generica, allora possiamo pensare che P_1 sia un punto liscio per C e che dunque $card(\tilde{C} \cap E_1) = 1$. In modo analogo si vede per gli altri divisori eccezionali. □

Osservazione 20. *I divisori eccezionali sono curve sulla superficie dello scoppiamento che non si intersecano tra di loro, quindi dal momento che $\hat{\varphi}$ é un'immersione, le loro immagini sono rette sghembe di S.*

Proposizione 46. *Per ogni punto $p \in S$ esistono al piú tre rette passanti per p contenute in S.*

Dimostrazione:
Sia L una retta per p contenuta in S. Si ha che il piano tangente a S in p, T_pS contiene tutte le direzioni tangenti delle curve passanti per p contenute in S. Quindi $T_pL \subset T_pS$, pertanto tutte le rette per p contenute in S stanno in $T_pS \cap S$ curva piana di grado tre, quindi sono al piú tre. □

Lemma 12. *Sia $X \in \mathbb{P}^2$ una curva di grado d e sia $\tilde{X}$ la sua trasformata stretta, allora la curva $\hat{\varphi}(\tilde{X})$ ha grado $3d - k$ dove k é il numero dei punti base di δ per cui passa X contati con molteplicitá. Ovvero se indichiamo con m_i la molteplicitá nel punto P_i, allora $k = \sum_{i=1}^{6} m_i$.*

Dimostrazione:
Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^3$, allora $H \cap \hat{\varphi}(\tilde{X}) = H \cap S \cap \hat{\varphi}(\tilde{X}) = \hat{\varphi}(\tilde{C}) \cap \hat{\varphi}(\tilde{X})$, dove $\tilde{C} \in \Delta$, in quanto ogni sezione iperpiana di S corrisponde ad una curva $\tilde{C} \in \Delta$.

Poiché $\hat{\varphi}$ é un'immersione si ha che $card(\hat{\varphi}(\tilde{C}) \cap \hat{\varphi}(\tilde{X})) = card(\tilde{C} \cap \tilde{X}) = 3d-k$. Infatti si ha che $C \cap X = 3d$, é chiaro che se X passa per uno dei punti che scoppiamo allora dopo lo scoppiamento questo non é piú un punto di intersezione tra $\tilde{C}$ e $\tilde{X}$. Inoltre poiché H é un piano generico, possiamo supporre che X e C non abbiano la stessa direzione tangenti nei suoi punti che scoppiamo. □

Teorema 8. *La superficie S contiene esattamente ventisette rette.*

Dimostrazione:

Innanzi tutto mostriamo che contiene ventisette rette. Sicuramene sei rette sono date dall'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ dei divisori eccezionali. Consideriamo ora la retta $R_{i,j}$ passante per i punti p_i, p_j con $i \neq j$. Indichiamo con $\tilde{R_{i,j}}$ la sua trasformata stretta, allora per il lemma 11, $deg(\hat{\varphi}(\tilde{R_{i,j}})) = 3 \cdot 1 - \sum_{i=1}^{6} m_{P_i}(R_{i,j}) = 3 - 2 = 1$, dunque é una retta contenuta in S. Se dunque consideriamo tutte le rette di $\mathbb{P}^2$ passanti per due dei sei punti scoppiati, queste rappresenteno ancora delle rette in S. Tutte le rette di questo tipo sono esattamente $C_{6,2} = 15$, che aggiunte alle sei iniziali fanno ventuno rette. Per trovare le altre sei rette procediamo in modo analogo a quanto fatto prima, considerando le coniche di $\mathbb{P}^2$ passanti per cinque dei sei punti scoppiati. Sia C_j la conica passante per ogni P_i con $i \neq j$, dal momento che tra i P_i, non ci sono tre punti allineati si ha che C_j é una conica liscia per ogni $j = 1, .., 6$. Sia $\tilde{C_j}$ la sua trasformata stretta, allora per il lemma 11, $deg(\hat{\varphi}(\tilde{C_j})) = 3 \cdot 2 - 5 = 1$, pertanto le coniche di $\mathbb{P}^2$ della forma C_j, rappresentano esattamente sei rette in S, proprio quelle che ci mancavano per arrivare a ventisette.

Mostreremo ora che sono esattamente ventisette. Sia C una retta su S, supponiamo che C non sia l'immagine di uno dei sei divisori eccezionali, allora $deg(C) = 1$ e $g(C) = 0$ (dove con $g(C)$ indichiamo il genere geometrico di C). Ora per il lemma precedente si ha che $deg(C) = 3d - \sum_{i=1}^{6} m_i$, dove $d = deg(Y)$, Y é la curva piana birazionale a C e m_i rappresentano le molteplicitá di Y nei punti scoppiati P_i. Vogliamo dimostrare che Y o é una retta passante per due dei sei punti scoppiati o é una conica passante per cinque dei sei punti scoppiati. Sappiamo che C é liscia, pertanto il genere geometrico é nullo ed é uguale a quello aritmetico. Inoltre il genere é un invariante birazionale e dunque $g(C)$ é uguale al genere geometrico di Y, quindi $g(C) = g(Y) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{6} \frac{m_i(m_i-1)}{2}$. Allora $(d-1)(d-2) - \sum_{i=1}^{6} m_i(m_i-1) = 0$.

Abbiamo quindi le seguenti equazioni:

$$d^2 - 3d + 2 - \sum_{i=1}^{6} m_i^2 + \sum_{i=1}^{6} m_i = 0$$
$$3d = 1 + \sum_{i=1}^{6} m_i$$

Andando a sostituire $3d$ nella prima equazione otteniamo:
$d^2 - \sum_{i=1}^{6} m_i^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{6} m_i^2 = d^2 + 1$.
Ora, per la disuguaglianza di Schwarz abbiamo che: $(\sum_{i=1}^{6} m_i)^2 \leq 6 \sum_{i=1}^{6} m_i^2 \Longrightarrow$

$$(3d-1)^2 \leq 6(d^2+1) \Leftrightarrow 3d^2 - 6d - 5 \leq 0.$$

Sviluppando la disequazione otteniamo che $\frac{3-\sqrt{24}}{3} \leq d \leq \frac{3+\sqrt{24}}{3} \Longrightarrow d \leq \frac{3+\sqrt{24}}{3} < 3$. In conclusione abbiamo che d puó avere solo due valori $d = 1$ o $d = 2$.
Se $d = 1$ si ha che:

$$\sum_{i=1}^{6} m_i = 2$$
$$\sum_{i=1}^{6} m_i^2 = 2$$

Da queste due equazioni si ricava che esistono i, j con $i \neq j$ tali che $m_i = m_j = 1$, mentre $m_k = 0$ per ogni $k \neq i, j$. La curva Y é dunque una retta passante per p_i, p_j.
Se $d = 2$, si ha che:

$$\sum_{i=1}^{6} m_i = 5$$
$$\sum_{i=1}^{6} m_i^2 = 5.$$

Dalla seconda equazione si ricava che:
i)$m_i = 1$ per ogni $i \neq j$ e $m_j = 0$ oppure
ii) esistono h, k tali che $m_h = 2, m_k = 1$ e $m_i = 0$ per ogni $i \neq h, k$.
Se ii) fosse vera avrei che $\sum_{i=1}^{6} m_i = 3$ in contraddizione con la prima ipotesi, dunque si ha che se $d = 2$, la curva Y é una conica che passa per cinque dei sei punti scoppiati. □

Proposizione 47. *Ogni retta L in una cubica liscia S interseca esattamente altre dieci retta contenute in S, tali rette sono suddivise in cinque coppie di rette in modo che le rette di una coppia si intersechino.*

Dimostrazione:
Sia L una retta contenuta in S, distinguiamo tre casi:
a) L é l'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ di un divisore eccezionale;
b) L é l'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ di una retta passante per P_i, P_j con $i \neq j$;
c) L é l'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ di una conica passante per cinque dei sei punti scoppiati.
Caso a): Sia L l'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ di E_i. Si ha che E_i incontra sicuramente tutte le trasformate strette delle rette che passano per P_i, in particolare incontra le cinque trasformate strette delle rette passanti per P_j, P_i con $i \neq j$. Inoltre E_i

interseca le trasformate strette delle coniche passanti per P_i e per altri quattro punti base; coniche di questo tipo sono cinque. In conclusione $\hat{\varphi}(E_i)$ interseca esattamente altre dieci rette di S. Tali rette sono esattamente dieci in quano ogni retta e ogni conica non passante per P_i non puó intersecare il divisore eccezionale E_i.
Caso b) Sia L l'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ della traformata stretta d una retta passante per P_1, P_2. Sia ha che $R1,2 =< P_1, P_2 >$ interseca le rette $< P_k, P_l >$ con $k, l \neq 1, 2$, in punti che stanno al di fuori dei sei punti base, tali rette sono esattamente $C_{4,2} = 6$ È chiaro che le rette diverse da $R_{1,2}$ che passano per il punto P_i con $i = 1, 2$, dopo lo scoppiamento l'intersezione con $R_{1,2}$ viene persa. Inoltre $R_{1,2}$ interseca la conica C_{13456} (passante per i punti P_1, P_3, P_4, P_5, P_6) in due punti P_1, a con $a \neq P_i$ per ogni $i = 2, ..., 6$ e la conica C_{23456} nei punti P_2, b con $b \neq i$ per ogni $i = 1, 3, ..., 6$. È chiaro che dopo lo scoppiamento le intersezioni in P_1 e in P_2 scompaiono, mentre rimangono quelle in a, b. Se invece C é una conica passante per P_1, P_2, allora $R_{1,2} \cap C = \{P_1, P_2\}$, dopo lo scoppiamento tali intersezioni vengono perse. In conclusione abbiamo che L interseca sei rette derivate da rette della forma $R_{i,j}$, due rette derivate dalle coniche C_{23456}, C_{13456} e le rette derivate dai divisori eccezionali. Inoltre L non interseca altre rette al di fuori di queste.
Caso c) Sia L l'immagine attraverso $\hat{\varphi}$ di una conica C passante per cinque dei sei punti scoppiati, quindi la sua trasformata stretta intersecherá cinque divisori eccezionali. Sia $P_1 \notin C$, allora tutte le rette $R_k =< P_1, P_k >$ con $k = 2, ..., 6$ intersecano C in due punti uno dei quali non appartiene a $\{P_1, ..., P_6\}$, quindi questa intersezione rimane anche dopo lo scoppiamento e ci dice che L, interseca altre cinque rette che aggiunte alle cinque di prima fanno dieci. L non interseca altre rette al di fuori di queste. Infatti presa una conica diversa da C e passante per cinque dei sei punti scoppiati, questa interseca C in quattro punti appartenenti a $\{P_1, ...P_6\}$ e tali intersezioni vengono perse dopo lo scoppiamento. Sia invece R una retta passante per P_i, P_j con $i, j \neq 1$ allora $C \cap R = \{P_i, P_j\}$, ma anche queste intersezioni si perdono dopo lo scoppiamento. □

Proposizione 48. *Nella superficie S esistono altre sei rette $G_1, ..., G_6$ sghembe tra loro, differenti dalle E'_i, immagini attraverso $\hat{\varphi}$ dei divisori eccezionali, tali che G_i interseca E'_j per ogni $i \neq j$.*

Dimostrazione:
Sia C_1 la conica di $\mathbb{P}^2$ passante per i punti P_i con $i \neq 1$. Indichiamo con $G_1, ..., G_6$ le immagini attraverso $\hat{\varphi}$ delle trasformate strette $\tilde{C}_i$, delle C_i. Notiamo che le $\tilde{C}_i$ non si intersecano due a due, ció significa che le K_i sono rette

sghembe. Inoltre poiché C_i passa per i punti P_j con $i \neq j$, allora si ha che la retta G_i incontra le rette E'_j con $j \neq i$. □

Bibliografia

[1] Edoardo Sernesi, *Geometria I.* Bollati-Boringhieri.

[2] Edoardo Sernesi, *Geometria II.* Bollati-Boringhieri.

[3] I. Shafarevich, *Algebraic Geometry I.* Springer-Verlang.

[4] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry, vol 1.* Springer-Verlang.

[5] Joe Harris, *Algebraic Geometry - A first course.* Springer-Verlang.

[6] Philippe Ellia, *Appunti di geometria I.* Pitagora Ed.

[7] Philippe Ellia, *Appunti di geometria algebrica.*

[8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer (1977).