Grassmannians

Let V be a k-vector space of dimension n and let W $\subseteq$ V be a subspace of dimension h. We take a basis $\{v_1,...,v_h\}$ of W and consider the h-multivector $v_1\wedge...\wedge v_h$ in the h-wedge product $\bigwedge^h V$. If $\{u_1,...,u_h\}$ is another basis of W and B is the matrix of change of basis we have $v_1\wedge...\wedge v_h = \det(B)(u_1\wedge...\wedge u_h)$. The matrix B is invertible so $\det(B) \neq 0$ and the two multivector $v_1\wedge...\wedge v_h$ and $u_1\wedge...\wedge u_h$ identifies the same point in the projective space $\mathbb{P}(\bigwedge^h V)$. If we denote with $\mathbf{G}$(h,n) the set of the subspace of dimension h of V we have a well defined map

$$\mathrm{Pk}:\mathbf{G}(h,n) \to \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^h V), \text{ defined by } W \mapsto [v_1\wedge...\wedge v_h]$$

If $\{e_1,...,e_n\}$ is a basis of V then $\{e_{i_1}\wedge...\wedge e_{i_h}\}$ with $i_1 < i_2 < ... < i_h$ is a basis of $\bigwedge^h V$. So $\dim(\bigwedge^h V) = \binom{n}{h}$ and $\mathbb{P}(\bigwedge^h V) \cong \mathbb{P}^N$ with $N = \binom{n}{h} - 1$.
We can write the vector $v_1\wedge...\wedge v_h$ in the basis $\{e_{i_1}\wedge...\wedge e_{i_h}\}$ as

$$v_1\wedge...\wedge v_h = \textstyle\sum_{i_1<...<i_h} p_{i_1,...,i_h} e_{i_1}\wedge...\wedge e_{i_h}$$

The elements $p_{i_1,...,i_h}$ are called the *Plücker coordinates* of W.
Given a multivector $w \in \bigwedge^h V$ and a vector $v \in V$ we say that v divides w if there exist a multivector $u \in \bigwedge^{h-1} V$ such that $w = v \wedge u$. A multivector $w \in \bigwedge^h V$ is totally decomposable if and only if the space of vectors dividing w has dimension h.
For any $[w] = \mathrm{Pk}(W)$ we can racover W as the space of vectors v such that $v \wedge w = 0$ in $\bigwedge^{h+1} V$. So the map Pk is injective and it is called the *Plücker embedding.* Now we give a more explicit description of this embedding. If $H = \langle v_1,...,v_h\rangle$ and $\{e_1,...,e_n\}$ is a basis of V we can write $v_i = v_i^1 e_1 + ... + v_i^k e_k$. We consider the h×n matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_h^1 & \dots & \dots & v_h^n \end{pmatrix}$$

If $\Delta_{i_1,...,i_h}$ is the determinant of the matrix h×h whose columns are the columns $i_1,...,i_h$ of $\mathcal{M}$ with $i_1 <...< i_h$ then the *Plücker embedding* can be write in the following way

$$\mathrm{Pk}:\mathbf{G}(h,n) \to \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^h V), \text{ defined by } W \mapsto [\Delta_{1,..,h}:...:\Delta_{n-h,..,n}]$$

Now we fix a multivector $w \in \bigwedge^h V$ and consider the map

$$\varphi_w\colon V \to \textstyle\bigwedge^{h+1} V,\ v \mapsto w \wedge v$$

Then w is totally decomposable if and only if $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_w)) = k$ if and only if $\mathrm{rank}(\varphi_w) = n\text{-}k$. We note that the rank of φ_w is never strictly less than n-k and we conclude that

$$[w] \in \mathbf{G}(h,n) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(\varphi_w) \leq n\text{-}k$$

Now the map $L:\bigwedge^h V \to \mathrm{Hom}(V,\bigwedge^{h+1} V)$ defined by $w \mapsto \varphi_w$ is linear and $\mathbf{G}(h,n) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^h V)$ is the subset defined by the vanishing of (n-h+1)×(n-h+1) minors of the matrix of L. We see that $\mathbf{G}$(h,n) is an algebraic variety called the *Grassmannians of the h-planes of V.*

Observation 1. Any h-plane W $\subseteq$ V determine a (n-h)-plane $\frac{V}{W}$, and we have an exact sequence

$$0 \mapsto W \to V \to \frac{V}{W} \mapsto 0$$

By dualization we obtein another exact sequence

$$0 \mapsto (\frac{V}{W})^* \to \mathrm{V}^* \to \mathrm{W}^* \mapsto 0$$

Considering the canonical isomorphism of a vecotor space of finite dimension with its bidual, if we dualize the second sequence we recover the first sequence. So we have a bijective correspondence between the h-plane in V and the (n-h)-plane in V* then $\mathbf{G}$(h,V) $\cong$ $\mathbf{G}$(n-h,V*).

It is clear that the variety $\mathbf{G}$(h-1,n-1) parametrizing the (h-1)-planes in $\mathbb{P}^n$ is isomorphic to $\mathbf{G}$(h,n). In the following we denote with $\mathbf{G}$(h,n) the Grassmannians of h-planes in $\mathbb{P}^n$.

Proposition 1. The Grassmannian $\mathbf{G}$(h,n) parametrizing the h-planes in $\mathbb{P}^n$ is a smooth variety of dimension (h+1)(n-h).

Proof: We procede by induction on h.
If h = 0 then $\mathbf{G}$(0,n) $\cong$ $\mathbb{P}^n$ and dim($\mathbf{G}$(0,n)) = n = (0+1)(n-0). Now we consider the incidence variety

$$\mathcal{I} = \{(\mathrm{x,H}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{H}\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbf{G}(\mathrm{h,n})$$

The fibre of the first projection on any x $\in$ $\mathbb{P}^n$ is

$$\Pi_1^{-1}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{H} \in \mathbb{P}^n \mid \mathrm{x} \in \mathrm{H}\} = \{\text{(h-1)-planes of } \mathbb{P}^{n-1}\} \cong \mathbf{G}(\text{h-1,n-1})$$

By induction hypothesis we have dim(Π_1^{-1}(x)) = dim($\mathbf{G}$(h-1,n-1)) = (h-1+1)(n-1-h+1) = h(n-h). So we have dim($\mathcal{I}$) = dim(Π_1^{-1}(x)) + n = k(n-k)+n.
Now we consider the fibre of the second projection

$$\Pi_2^{-1}(\mathrm{H}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{P} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{H}\} \cong \mathrm{H}$$

We have dim($\mathbf{G}$(h,n)) = dim($\mathcal{I}$) + dim(Π_2^{-1}(H)) = h(n-h)+n-h = (k+1)(n-h).
We denote by $\mathrm{P}_H \in \mathbf{G}$(h,n) the point corresponding to the (h+1)-plane H of V^{n+1}. Let $\{\mathrm{v}_0,\ldots,\mathrm{v}_h\}$ be a basis of H. If $\{\mathrm{e}_0,\ldots,\mathrm{e}_n\}$ is a basis of V^{n+1} then we can write $\mathrm{v}_i = \mathrm{v}_i^0\mathrm{e}_0+\ldots+\mathrm{v}_i^n\mathrm{e}_n$.
We consider the matrix

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} v_0^0 & \ldots & \ldots & v_0^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_h^0 & \ldots & \ldots & v_h^n \end{pmatrix}$$

Let $\mathcal{M}_h$ a (h+1)×(h+1) minor of $\mathcal{M}$ obtained extracting h-columns in $\mathcal{M}$, say the first h, we consider the set

$$\mathcal{U}_I = \{\mathrm{P}_H \in \mathbf{G}(\text{h+1,n+1}) \mid \det(\mathcal{M}_I) \neq 0\}$$

The sets $\mathcal{U}_I$ are open sets in $\mathbf{G}$(h+1,n+1) and on $\mathcal{U}_I$ the matrix $\mathcal{M}_I$ is invertible and we have

$$\mathcal{M}_I^{-1}\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{0,1} & \ldots & \lambda_{0,n-h} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_{h,1} & \ldots & \lambda_{h,n-h} \end{pmatrix}$$

We note that any point $\mathrm{P}_H \in \mathcal{U}_I$ determines uniquely a matrix of this form. So we have a bijective correspondence

$$\psi_I\colon \mathcal{U}_I \to \mathrm{k}^{(h+1)(n-h)},\ \mathrm{P}_H \mapsto (\lambda_{0,1},\ldots,\lambda_{0,n-h},\ldots,\lambda_{h,n-h})$$

So $\mathcal{U}_I \cong k^{(h+1)(n-h)}$. Now the open sets of the form $\mathcal{U}_I$ cover $\mathbf{G}$(h+1,n+1) and we conclude that $\mathbf{G}$(h+1,n+1) is smooth. □

The first non trivial example of Grassmannian is the case of the lines in $\mathbb{P}^3$.

Example 1. A line L = <x,y> in $\mathbb{P}^3$ corresponds to a plane H in V^4. If $\{e_0,...,e_3\}$ is a basis of V^4 we can write $x = x_0e_0+...+x_3e_3$ and $y = y_0e_0+...+y_3e_3$. In this case we have N = 5 and the *Plücker embedding* is

$$\text{Pk: } \mathbf{G}(1,3) \to \mathbb{P}^5,\ L \mapsto [\Delta_{0,1}:\Delta_{0,2}:\Delta_{0,3}:\Delta_{1,2}:\Delta_{1,3}:\Delta_{2,3}]$$

where $\Delta_{i,j} = x_iy_j - x_jy_i$.
The $\Delta_{i,j}$ satisfy the equation $\Delta_{0,1}\Delta_{2,3} - \Delta_{0,2}\Delta_{1,3} + \Delta_{0,3}\Delta_{1,2} = 0$.
If $[X_0:...:X_5]$ are the homogeneus coordinates on $\mathbb{P}^5$ then $\mathbf{G}(1,3)$ is contained in the quadric

$$K = \mathbf{V}(X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3)$$

But we know that $\mathbf{G}(1,3)$ is a projective variety of dimension 4 so it must be equal to K. We conclude that the Grassmannian $\mathbf{G}(1,3)$ is a smooth quadric hypersurface in $\mathbb{P}^5$.

Rette nella Quadrica liscia

Sia k un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero e V^4 un k-spazio vettoriale di dimensione 4. Denotiamo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V^4)$.
Abbiamo visto che la quadrica di Klein $\mathcal{K} = \mathbf{G}(1,3)$ parametrizza tutte le rette di $\mathbb{P}^3$. Consideriamo una quadrica liscia Q, a meno di proiettività (automorfismi di $\mathbb{P}^3$) possiamo supporre

$$Q = \mathbf{V}(XY - ZW) = \{[X:Y:Z:W] \in \mathbb{P}^3 \mid XY - ZW = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Sappiamo che Q contiene due schiere di rette, ha senso chiedersi a quale luogo geometrico in $\mathcal{K}$ tali rette corrispondano.
E' chiaro che le rette

$$L = \{Y = Z = 0\},\ R = \{Y = W = 0\}$$

sono contenute in Q. Le rette L ed R sono incidenti nel punto [1:0:0:0] pertanto appartengono a schiere diverse. Indichiamo con S_L la schiera di L e con S_R la schiera di R. Ragioniamo nel modo seguente

- Consideriamo il fascio di piani per L dato da $\lambda Y + \mu Z = 0$. Intersecando il fascio con Q troveremo tutte le rette di S_R.

$$\begin{cases} \lambda Y + \mu Z = 0 \\ XY - ZW = 0 \end{cases} \begin{cases} Y = -\frac{\mu}{\lambda} Z \\ W = -\frac{\mu}{\lambda} X \end{cases}$$

  Osserviamo che per $\mu = 0$ troviamo R. Quindi i piani di V^4 rappresentanti le rette in S_R sono quelli del tipo

$$<(\lambda,0,0,-\mu),(0,-\mu,\lambda,0)>$$

Immergendo tali piani in $\mathcal{K}$ via il Plucker embedding troviamo

$$<(\lambda,0,0,-\mu),(0,-\mu,\lambda,0)> \mapsto [-\lambda\mu:\lambda^2:0:0:-\mu^2:\lambda\mu].$$

Siano $[X_0:X_1:X_2:X_3:X_4:X_5]$ le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^5$. Vediamo allora che i punti dell'immagine sono legati dalle relazioni

$$X_0+X_5 = 0,\ X_2 = X_3 = 0.$$

Le tre relazioni identificano uno spazio lineare di codimensione tre in $\mathbb{P}^5$ ovvero un piano. Quindi le rette di S_R sono rappresentate da una sezione piana di $\mathcal{K}$ che sarà quindi una curva piana di grado 2 (Th di Bezout :-)). Per vederlo concretamente (per chi non crede al Th di Bezout) intersechiamo il piano $H = (X_0+X_5 = 0,\ X_2 = X_3 = 0)$ con la quadrica di Klein data da $X_0X_5-X_1X_4+X_2X_3$.
Abbiamo che l'intersezione è la conica liscia di equazione $X_0^2+X_1X_4 = 0$ nel piano Π.
In conclusione abbiamo provato che le rette di S_R sono rappresentate da una conica liscia K_R nella quadrica di Klein $\mathcal{K}$.

- Procediamo in modo del tutto analogo per le rette dell'altra schiera. Il fascio di piani per R è dato da $\lambda Y+\mu W=0$. In questo caso abbiamo

$$\begin{cases} \lambda Y + \mu W = 0 \\ XY - ZW = 0 \end{cases} \begin{cases} Y = -\frac{\mu}{\lambda}W \\ Z = -\frac{\mu}{\lambda}X \end{cases}$$

Per $\mu = 0$ troviamo L. I piani di V^4 rappresentanti le rette in S_L sono quelli del tipo $<(\lambda,0,-\mu,0),(0,-\mu,0,\lambda)>$ Via il Plucker embedding si ha

$$<(\lambda,0,-\mu,0),(0,-\mu,0,\lambda)> \mapsto [-\lambda\mu:0:\lambda^2:-\mu^2:0:-\lambda\mu].$$

Quindi le rette di S_L sono rappresentate dalla sezione piana

$$E = (X_0-X_5 = 0,\ X_1 = X_4 = 0)$$

di $\mathcal{K}$.
Prendendo le equazioni si ha che tale sezione è la conica liscia K_2 di equazione $X_0^2+X_2X_3 = 0$ nel piano E. Concludiamo che anche tutte le rette di S_L sono rappresentate da una conica liscia in $\mathcal{K}$.

Notiamo che i piani H ed E di $\mathbb{P}^5$ sono disgiunti pertanto la curva $C = K_1 \cup K_2$ è una curva liscia (ma riducibile) di grado 4.

Riassumento abbiamo provato che tutte le rette in una quadrica liscia sono parametrizzate da una curva C contenuta nella quadrica di Klein. Tale curva ha grado 4 ed è riducibile all'unione di due coniche lisce giacenti in piani complementari (notate che H,E spannano $\mathbb{P}^5$ *essendo la loro intersezione vuota).*

Una quadrica liscia Q è determinata da una sola delle sue schiere (in realtà da tre rette di una schiera). A tale schiera sappiamo associare una conica in $\mathcal{K}$. Ci chiediamo se ogni conica in $\mathcal{K}$ è ottenibile da una quadrica liscia. Procediamo con ragionamenti di natura puramente dimensionale.
Le quadriche di $\mathbb{P}^3$ sono in corrispondeza biunivoca con il proiettivizzato del k-spazio vettoriale $k[X,Y,Z,W]_2$ i cui elementi sono i polinomi omogenei di grado due in X,Y,Z,W. Poichè

$$\dim_k k[X,Y,Z,W]_2 = \binom{2+3}{3} = 10$$

lo spazio proiettivo delle quadriche $\mathbb{P}(k[X,Y,Z,W]_2)$ ha dimensione 9.
Consideriamo ora le coniche in $\mathcal{K}$, sappiamo che ognuna di tali coniche è ottenibile attraverso sezione piana di $\mathcal{K}$. Pertanto la varietà delle coniche in $\mathcal{K}$ ha la stessa dimensione della vaietà dei piani di $\mathbb{P}^5$ ovvero $\mathbf{G}(2,5)$. Sappiamo che $\dim(\mathbf{G}(2,5)) = (2+1)(5-2) = 9$.
Concludiamo che ogni conica liscia in $\mathcal{K}$ determina una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$.

Osservazione 1. Le Grassmanniane rappresentano l'oggetto naturale parametrizzante i sottospazi lineari di una certa dimensione in uno spazio proiettivo. Il passo successivo è chiedersi cosa succede se in luogo di spazi lineari si prendono sottovarietà di $\mathbb{P}^n$ non necessariamente lineari. La soluzione a questi tipi di problemi sono le varietà di Chow e gli schemi di Hilbert (le Grassmanniane sono particolari schemi di Hilbert). Capite bene che se si considerano sottovarietà di dimensione h in una varietà di dimensione k anzichè in $\mathbb{P}^n$ (ad esempio le nostre coniche nella quadrica di Klein) il problema si complica ulteriormente. Le varietà che parametrizzano le curve di un dato grado in uno spazio proiettivo sono note come varietà di moduli. In generale lo studio di tali varietà (dimensione, grado ecc...) è molto difficile.

Spazi di Ipersuperfici

Lo studio dello spazio delle ipersuperfici di grado assegnato d in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ è un problema relativamente semplice in geometria algebrica. Tale semplicità deriva dal fatto che un'ipersuperficie è definita da un solo polinomio (ad esempio le quadriche di $\mathbb{P}^3$). Lo spazio vettoriale $k[X_0,...,X_n]_d$ dei polinomi omogenei di grado d ha dimensione

$$\dim_k k[X_0,...,X_n]_d = \binom{n+d}{d}.$$

Ogni polinomio $P \in k[X_0,...,X_n]_d$ determina univocamente un'ipersuperficiè di grado d in $\mathbb{P}^n$, a meno di un fattore moltiplicativo non nullo. Risulta quindi che le ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n$ sono parametrizzate dai punti di uno spazio proiettivo

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(k[X_0,...,X_n]_d) \text{ con } N = \binom{n+d}{d} - 1.$$

Consideriamo il caso n = 3, d = 2 (quadriche di $\mathbb{P}^3$) allora N = 9.
Ci chiediamo quale oggetto in $\mathbb{P}^9$ rappresenta le quadriche conteneti due rette sghembe L,R di $\mathbb{P}^3$ fissate. Imporre ad una quadrica liscia Q di contenere una retta significa imporre il passaggio per tre punti della retta. Pertanto lo spazio $\mathcal{I}_{L\cup R}(2)$ delle quadriche contenenti L ed R è un sottospazio di dimensione 9 - 3 - 3 = 3 di $\mathbb{P}^9$.
Consideriamo le quadriche di $\mathcal{I}_{L\cup R}(2)$ che hanno rango due. E' evidente che tali quadriche sono parametrizzate da un luogo geometrico nel $\mathbb{P}^3$ delle quadriche di $\mathcal{I}_{L\cup R}(2)$. Oltre al

passaggio per punti fissati abbiamo però imposto una condizione sul rango. Ci apettiamo quindi di trovare una varietà non lineare. E' naturale chiedersi (o almeno è naturale per Giorgio) cosa sia questa varietà.
A meno di proittività possiamo supporre

$$\mathrm{L} = \{\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0\},\ \mathrm{R} = \{\mathrm{Z} = \mathrm{W} = 0\}.$$

Prendendo tutte le possibili unioni di una piano del fascio per L e un piano del fascio per R troveremo tutte le quadriche di rango 2 contenenti L ed R. Allora le quadriche che cerchiamo sono del tipo

$$(\lambda \mathrm{X}+\mu \mathrm{Y})(\alpha \mathrm{Z}+\beta \mathrm{W}) = 0,$$
$$\lambda\alpha \mathrm{XZ}+\lambda\beta \mathrm{XW}+\mu\alpha \mathrm{YZ}+\mu\beta \mathrm{YW} = 0$$

con $[\lambda{:}\mu] \in \mathbb{P}^1$ e $[\alpha{:}\beta] \in \mathbb{P}^1$.
Fissiamo delle coodinate omogenee $[\mathrm{X}_0{:}\mathrm{X}_1{:}\mathrm{X}_2{:}\mathrm{X}_3]$ sul $\mathbb{P}^3$ parametrizzante tutte le quadriche contenenti L ed R. Vediamo che le per le quadriche di rango due si ha $\mathrm{X}_0\mathrm{X}_3$ - $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 = 0$. Quindi la varietà che cerchiamo è contenuta nella quadrica liscia Q di equazione $\mathrm{X}_0\mathrm{X}_3$ - $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 = 0$. Consideriamo il seguente morfismo

$$\varphi{:}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,\ ([\lambda{:}\mu],[\alpha{:}\beta]) \mapsto [\lambda\alpha{:}\lambda\beta{:}\mu\alpha{:}\mu\beta].$$

L'immagine del morfismo è contenuta in Q. Si dimostra che il morfismo φ è un'immersione detta immersione di Segre (non è difficile provate che φ è iniettivo, e per provare che ha differenziale iniettivo prendete delle carte affini sui due $\mathbb{P}^1$ poi ragionate come in geometria differenziale). Quindi l'immagine di φ è una sottovarietà liscia di dimensione 2 di Q e pertanto coincide con Q.

Riassumendo abbiamo provato che le quadriche di $\mathbb{P}^3$ sono parametrizzate da un $\mathbb{P}^9$, che le quadriche contenenti due rette sghembe sono un $\mathbb{P}^3$ e che le quadriche lisce conteneti due rette sghembe di rango 2 sono una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$.