Università degli Studi di Ferrara
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica
Matematica Pura

La caratteristica di Eulero e il teorema di Poincaré-Hopf

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimiliano Mella

Laureanda:
Annalisa Bruno

Anno Accademico 2008-2009

Indice

Introduzione **2**

1 Omologia **4**
1.1 Preliminari 4
1.2 Teoria Singolare 6
1.3 Complessi di catene 11
1.4 Invarianza omotopica dell'omologia 13
1.5 π_1 e H_1 14
1.6 Omologia relativa 18
1.7 La sequenza omologica esatta 22
1.8 Il teorema di escissione e l'omologia di $\mathbf{S}^n$ 24
1.9 I Numeri di Betti e la Caratteristica di Eulero 26

2 Il teorema di Poincaré-Hopf **28**
2.1 L'indice di un campo vettoriale e il teorema di Poincaré-Hopf . . 28
2.2 La Teoria di Morse 38
2.2.1 Definizioni e lemmi introduttivi 39
2.2.2 Le Diseguaglianze di Morse 39
2.2.3 Applicazione ai manifold euclidei 41

3 La caratteristica di Eulero per le superfici compatte **44**
3.1 Triangolazione delle superfici compatte 44
3.2 La caratteristica di Eulero di una superficie compatta 46

Bibliografia **50**

Introduzione

La caratteristica di Eulero è un invariante topologico fondamentale per lo studio dei campi vettoriali su manifold differenziabili. Ad esempio, se un manifold M è compatto e connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta un campo vettoriale non nullo è che la sua caratteristica di Eulero $\chi(X)$ sia zero. L'unico inconveniente, come spesso capita quando si tratta di omologia, è che non sempre è facile calcolare tale valore.

Un primo risultato, valido per i 2-manifold compatti (ossia per le superfici compatte), fu enunciato dallo stesso Eulero. Tuttavia nel caso più generale di un n-manifold le cose si complicano notevolmente, soprattutto per quanto riguarda le ipotesi richieste per poter formulare un teorema significativo.

Inoltre la caratteristica introdotta da Eulero per i 2-manifold veniva calcolata in modo molto diverso dal calcolo omologico necessario per determinarla per manifold di dimensione superiore ($n \geq 2$).

In queste pagine ci proponiamo di introdurre le basi di omologia necessarie per una buona comprensione di un risultato molto importante noto come teorema di Poincaré-Hopf o teorema dell'indice di Poincaré. Una prima versione di questo risultato venne dimostrata, nel caso 2-dimensionale, già nel 1885 dal matematico francese Henri Poincaré, mentre della sua forma odierna dobbiamo la dimostrazione (1926) ad Heinz Hopf.

La potenza di questo risultato deriva dalla sua capacità di identificare la somma degli indici di un qualsiasi campo vettoriale su un manifold compatto M nei suoi zeri con un invariante topologico quale è la caratteristica di Eulero di M nella sua accezione omologica. Il teorema mostra dunque che lo stesso intero dato dalla somma degli indici è un invariante topologico.

La trattazione parte da una breve presentazione della teoria omologica, dove definiamo in particolare i concetti di modulo di omologia di un complesso di catene e chiariamo il legame che sussiste tra (primo) gruppo fondamentale e primo gruppo di omologia di uno spazio, per finire con una breve definizione dei numeri di Betti e della caratteristica di Eulero (omologica).

Nel secondo capitolo è proposta la dimostrazione del teorema principale, dopo l'introduzione di alcune definizioni e lemmi ausiliari. Il capitolo si conclude con una trattazione sintetica della Teoria di Morse sfruttata nella dimostrazione

del teorema di Poincaré-Hopf; il risultato principale di questa sezione è quello che asserisce l'esistenza universale di un campo differenziabile senza punti critici degeneri su un manifold.

Nel terzo capitolo concludiamo la trattazione con qualche cenno al metodo di calcolo della caratteristica di Eulero nel caso dei 2-manifold compatti senza l'uso dell'omologia, ma con il solo strumento della triangolazione.

Capitolo 1

Omologia

Cominciamo la trattazione con un'introduzione alla Teoria dell'Omologia, la quale sarà necessaria per comprendere appieno i risultati che vedremo in seguito.

1.1 Preliminari

Per iniziare riprendiamo alcune definizioni.

Definizione 1.1.1. *Siano G un gruppo e X un insieme, si dice allora che G* agisce *su X se esiste una funzione $a : G \times X \to X$ tale che, indicato con $gx = a(g, x)$, per ogni $g \in G$ ed $x \in X$ si ha che $1x = x$ e $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$.*

In particolare un'azione si dice transitiva *quando a ciascuna coppia di punti $x, y \in X$ è associato un certo $g \in G$ tale che $gx = y$.*

Definizione 1.1.2. *Uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{R}$ è un insieme E sul quale il gruppo additivo $\mathbb{R}^n$ agisce transitivamente. Per capire meglio, questo significa che per ogni coppia di punti P e Q in E esiste un unico vettore v in $\mathbb{R}^n$ da Q a P. Scriveremo $v = (P - Q)$.*

Sia ora t un numero reale, ad ogni t corrisponde un unico punto S tale che S si può scrivere come $tP + (1 - t)Q$. Se $P \neq Q$, l'insieme di tutti i punti di questo tipo con t che varia in $\mathbb{R}$ è la *retta* per P e Q. Generalizzando, dati i punti $P_0, \ldots, P_r$ e i numeri reali $a_0, \ldots, a_r$ tali che $a_0 + \cdots + a_r = 1$, possiamo definire il punto $\sum_{i=0}^{r} a_i P_i$ come l'unico S tale che $S - P_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i (P_i - P_0)$.

Definizione 1.1.3. *Diciamo poi che $P_0, \ldots, P_r$ sono linearmente indipendenti se lo sono i vettori $P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0$, in tal caso l'insieme degli S come definiti sopra è uno spazio affine di dimensione r e viene solitamente denominato* span *di $P_0, \ldots, P_r$. Ogni punto nello span ha un insieme di coordinate univocamente determinato $(a_0, \ldots, a_r)$, tali che $\sum_i a_i = 1$, dette* coordinate baricentriche *relative a $P_0, \ldots, P_r$.*

Richiamiamo ora la definizione di convessità di un sottoinsieme di uno spazio affine.

Definizione 1.1.4. *Dati due punti P e Q in uno spazio affine E chiamiamo* segmento *per P e Q l'insieme dei punti $tP + (1-t)Q$ sulla retta per P e Q che soddisfano $0 \leq t \leq 1$. Un sottoinsieme di uno spazio affine si dice allora* convesso *se tutti i segmenti per due qualsiasi dei suoi punti sono interamente contenuti in esso.*

Introduciamo ora un elemento importante per il successivo sviluppo della teoria omologica.

Definizione 1.1.5. *Dati i punti indipendenti $P_0, \ldots, P_r$, i punti S nel loro span che hanno tutte coordinate baricentriche non negative formano il* simplesso geometrico *r-dimensionale generato da $P_0, \ldots, P_r$.*

Diciamo poi che una funzione f da uno spazio affine E in un altro E' è una mappa affine se per ogni coppia di punti P e Q in E, tali che $f(P) \neq f(Q)$, essa manda la retta per P e Q nella retta per $f(P)$ e $f(Q)$.

Scegliendo un'origine 0 nello spazio affine E possiamo costruire una corrispondenza iniettiva tra i punti di E ed i vettori di $\mathbb{R}^n$ $P \leftrightarrow 0 + v$. Mettendo poi su E una topologia è possibile ottenere da questa corrispondenza un omeomorfismo.

Da ultimo ricordiamo qualche elemento di algebra.

Definizione 1.1.6. *Un gruppo abeliano A si dice libero se ammette una base, ossia se esiste una famiglia di elementi $\{e_i\}_{i \in I} \subset A$ tale che ogni elemento x di A si può scrivere in modo unico come $x = \sum_i x_i e_i$. Dove gli $x_i \in \mathbb{Z}$ e sono quasi tutti nulli.*

Definizione 1.1.7. *Chiamiamo* rango *di un gruppo abeliano libero il numero di elementi in una sua base.*

Definizione 1.1.8. *Dato un gruppo abeliano A, un elemento $a \in A$ è detto* elemento di torsione *se ha ordine finito. Ossia se esiste un intero n tale che $na = 0_A$.*

Definizione 1.1.9. *Il sottoinsieme di tutti gli elementi di torsione di A è un sottogruppo di A detto* sottogruppo di torsione *di A, indicato con A_{tor} oppure A_t. Un gruppo abeliano A è chiamato* gruppo di torsione *se $A = A_{tor}$, ossia se tutti gli elementi di A hanno ordine finito.*

Definizione 1.1.10. *Un gruppo G è* senza torsione *se, ogni volta che per un elemento $x \in G$ esiste un intero m tale che $mx = 0_G$, si ha che $x = 0_G$. Ossia se l'unico elemento con ordine finito in G è la sua unità.*

E' possibile dimostrare il seguente teorema, per la prova completa rimandiamo a [4].

Teorema 1.1.11. *Sia A un gruppo abeliano finitamente generato e sia A_{tor} il sottogruppo consistente di tutti gli elementi di A aventi ordine finito. Allora A_{tor} è finito e A/A_{tor} è libero.*

Richiamiamo un passaggio importante della dimostrazione. Si osserva che A/A_{tor} è senza torsione, dunque tutti i suoi elementi eccetto l'unità $0_A + A_{tor}$ hanno ordine infinito.

Poiché A/A_{tor} è un gruppo libero è lecito considerarne il rango.

Definizione 1.1.12. *Chiamiamo* rango *di un gruppo abeliano finitamente generato A il rango del gruppo abeliano libero A/A_{tor}.*

Definizione 1.1.13. *Sia A un anello commutativo, un* A-modulo *è una coppia (M, μ) dove M è un gruppo abeliano e μ è una mappa $A \times M \to M$ tale che, se scriviamo ax in luogo di $\mu(a, x)$, per ogni $a, b \in A$ e $x, y \in M$ sono soddisfatti i seguenti assiomi:*

$$a(x + y) = ax + ay,$$

$$(a + b)x = ax + bx,$$

$$(ab)x = a(bx),$$

$$1x = x.$$

Definizione 1.1.14. *Diciamo che M è un* A-modulo libero *se esso è un modulo contenente un insieme linearmente indipendente $X = \{e_i\}$ di generatori, ossia se ha una base. In tal caso si dice che M è un A-modulo libero su X.*

Definizione 1.1.15. *La* somma diretta *$\bigoplus_k M_k$ di A-moduli è definita come il sottomodulo del prodotto cartesiano degli M_k che consiste di quegli elementi (m_k) tali che al più un numero finito di m_k sono non nulli.*

1.2 Teoria Singolare

Consideriamo un prodotto cartesiano infinito ma numerabile $\mathbb{R}^\infty$ di copie di $\mathbb{R}$ e consideriamo i vettori

$$E_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots),$$

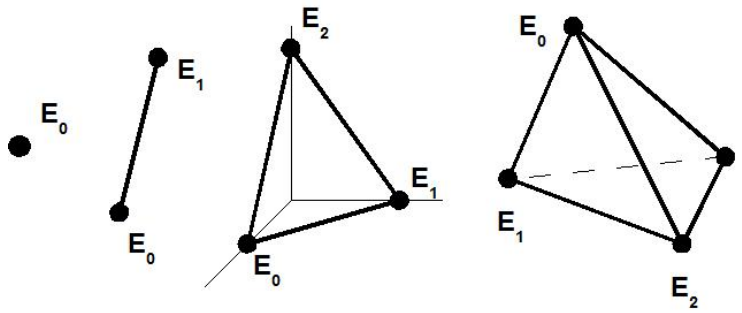
$$E_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots),$$

$$E_2 = (0, 1, \dots, 0, \dots),$$

ecc.

Definizione 1.2.1. *Identifichiamo $\mathbb{R}^n$ con il sottospazio del prodotto infinito avente tutte le componenti dopo la n-esima nulle. Definiamo quindi, per ogni $q \geq 0$, Δ_q come il simplesso geometrico q-dimensionale generato da $E_0, \ldots, E_q$, che chiameremo* q-simplesso (geometrico) standard.

Perciò Δ_0 è un punto, Δ_1 un segmento, Δ_2 un triangolo (incluso il suo interno), Δ_3 un tetraedro, ecc.



Se $P_0, \ldots, P_q$ sono punti indipendenti in uno spazio affine E, $(P_0, \ldots, P_q)$ denoterà la restrizione a Δ_q dell'unica mappa affine $\mathbb{R}^q \to E$ che manda E_0 in P_0, ..., E_q in P_q. Perciò $(E_0, \ldots, E_q)$ è l'identità di Δ_q, che chiameremo δ_q.

Definizione 1.2.2. *Dato uno spazio X, definiamo q-simplesso singolare in X una qualsiasi mappa $\Delta_q \to X$.*

Definizione 1.2.3. *Poiché la somma e la sottrazione tra q-simplessi singolari sono definite in modo puramente formale e vi è la possibilità di moltiplicare per scalari di un anello commutativo con unità R siamo in grado di definire il modulo libero generato da tutti i q-simplessi singolari $S_q(X)$. Gli elementi di $S_q(X)$ sono combinazioni lineari formali $\sum_\sigma v_\sigma \sigma$ dove σ varia tra i q-simplessi singolari e v_σ sono coefficienti di R. Queste somme vengono chiamate* q-catene singolari.

Per $q > 0$, definiamo $F_q^i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, per $0 \leq 1 \leq q$, come la mappa affine $(E_0, \ldots, \hat{E}_i, \ldots, E_q)$ dove $\hat{E}_i$ significa che è omesso. Per capire meglio

$$F_q^i(E_j) = \begin{cases} E_j & j < i \\ E_{j+1} & j \geq i. \end{cases}$$

Definiamo la *i-esima faccia* $\sigma^{(i)}$ di σ per un q-simplesso arbitrario σ come il (q-1)-simplesso singolare $\sigma \circ F_q^i$. Dunque F_q^i è la i-esima faccia di δ_q, e se $\sigma = (P_0, \ldots P_q)$ in X spazio affine $\sigma^{(i)} = (P_0, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_q)$.

Vediamo ora come è possibile definire anche per questi oggetti un bordo.

Definizione 1.2.4. *Chiamiamo bordo di un q-simplesso singolare σ la (q-1)-catena singolare $\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}$.*

Possiamo estendere ∂ ad un morfismo di moduli $S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ per linearità, perciò $\partial(\sum v_\sigma \sigma) = \sum v_\sigma \partial(\sigma)$. Per una 0-catena (ossia $q = 0$) si assume come bordo lo 0 stesso.

Per ottenere il risultato contenuto nella successiva proposizione è necessario il seguente lemma.

Lemma 1.2.5. *$F_q^i F_{q-1}^j = F_q^j F_{q-1}^{i-1}$ per $j < i$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è basata su un semplice calcolo. Vediamo infatti che:

$$F_q^i F_{q-1}^j(E_k) = \begin{cases} E_k & k < j \\ E_{k+1} & k \geq j \text{ e } k+1 < i \\ E_{k+2} & k+1 \geq i \end{cases}$$

Inoltre, poiché si ha:

$$F_q^j(E_k) = \begin{cases} E_k & k < j \\ E_{k+1} & k \geq j \end{cases}$$

e

$$F_{q-1}^{i-1}(E_k) = \begin{cases} E_k & k < i-1 \\ E_{k+1} & k \geq i-1 \end{cases}$$

la loro composizione è data da

$$F_q^j F_{q-1}^{i-1}(E_k) = \begin{cases} E_k & k+1 < i \text{ e } k < j \\ E_{k+1} & k+1 < i \text{ e } k \geq j \\ E_{k+1} & k+1 \geq i \text{ e } k+1 < j \\ E_{k+2} & k+1 \geq i \text{ e } k+1 \geq j \end{cases}$$

Ossia $F_q^i F_{q-1}^j = F_q^j F_{q-1}^{i-1}$ per $j < i$. □

Proposizione 1.2.6. *$\partial\partial = 0$.*

Dimostrazione. Per linearità possiamo verificare che $\partial(\partial(c)) = 0$ quando c è semplicemente un q-simplesso singolare σ. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \partial(\partial(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial(\sigma^{(i)}) \\ &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_q^i) \circ F_{q-1}^j \\ &= \sum_{j<i=1}^{q} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^j F_{q-1}^{i-1}) + \sum_{0=i\leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^i F_{q-1}^j) \end{aligned}$$

e le sommatorie si elidono ponendo nella prima $i' = j$ e $j' = i - 1$. □

Definizione 1.2.7. *Una q-catena singolare c su X tale che $\partial(c) = 0$ viene definita* ciclo, *mentre se $c = \partial(c')$ per una qualche (q+1)-catena c' su X allora*

diremo che c è un bordo. *Definiamo poi la relazione di equivalenza $\sim$ come segue: date due q-catene c_1 e c_2 si ha $c_1 \sim c_2$ se esse differiscono per un bordo, in tal caso diciamo che le due q-catene sono* omologhe. *Grazie alla proposizione 1.2.6 possiamo affermare che i bordi formano un sottomodulo $B_q(X)$ del modulo $Z_q(X)$ dei cicli; il modulo quoziente $Z_q(X)/B_q(X)$ è detto* q-esimo modulo di omologia singolare *di X e sarà indicato da*

$$H_q(X; R)$$

o semplicemente $H_q(X)$ quando il riferimento all'anello R è sottointeso.

Vediamo ora un esempio per comprendere meglio che cosa sono questi oggetti.

Esempio 1.2.8 (Omologia del punto)**.** *Sia $X = \{p\}$ uno spazio puntiforme. Non è restrittivo limitarci a considerare i simplessi e non le catene per la linearità dell'operatore ∂. Osserviamo che per ogni q esiste un unico q-simplesso singolare σ_q che manda Δ_q in p, ossia la mappa costante su p. Ci chiediamo allora cosa siano i q-cicli ed i q-bordi su X. Abbiamo che*

$$\partial(\sigma_q) = \begin{cases} \sigma_{q-1} & \text{se } q \text{ è pari e } q > 0 \\ 0 & \text{se } q \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infatti se ricordiamo che il bordo di un q-simplesso singolare è definito come $\partial(\sigma_q) = \sum_i (-1)^i \sigma^{(i)}$, avremo che, nel caso in cui q sia pari il numero di addendi è dispari, mentre in quello in cui q sia dispari il numero di addendi è pari. Da ciò segue che nel primo caso resta un q-1-simplesso, mentre nel secondo tutti i termini si elidono.

Vediamo di fare qualche conto per essere più chiari:

$$\partial(\sigma_0) = (-1)^0 \sigma_0^{(0)} = 0$$

perché il bordo di uno 0-simplesso è definito come il simplesso nullo 0*;*

$$\partial(\sigma_1) = (-1)^o \sigma_1^{(0)} + (-1)^1 \sigma_1^{(1)} = 0$$

perché $\sigma_1^{(0)} = \sigma_1^{(1)}$ ossia l'unica mappa $\Delta_0 \to X$;

$$\partial(\sigma_2) = (-1)^o \sigma_2^{(0)} + (-1)^1 \sigma_2^{(1)} + (-1)^2 \sigma_2^{(2)} = \sigma_1.$$

Otteniamo quindi che

$$Z_q(X) = B_q(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \text{ è pari e } q > 0 \\ S_q(X) & \text{se } q \text{ è dispari} \end{cases}$$

cosicché $H_q(X) = 0$ per ogni $q > 0$, mentre se $q = 0$ si ha che $Z_0(X) = S_0(X)$ e $B_0(X) = 0$. Dunque $H_0(X) \cong R$, come vedremo meglio grazie ad una proposizione successiva.

Proposizione 1.2.9. *Sia (X_k) la famiglia di componenti connesse per archi di X. Allora esiste un isomorfismo canonico*

$$H_q(X) \cong \bigoplus_k H_q(X_k) \ \forall q \geq 0.$$

Dimostrazione. Abbiamo chiaramente un isomorfismo tra $S_q(X)$ e la somma diretta su k degli $S_q(X_k)$ per ogni $q \geq 0$ tale che il bordo agisca componente per componente. Infatti, siccome Δ_q è connesso per archi, un q-simplesso σ mappa Δ_q in una qualche componente per archi di X. Perciò ogni q-catena c si scompone in modo unico come segue: $c = \sum_k c_k$ dove le c_k sono q-catene singolari su X_k. □

Proposizione 1.2.10. *$H_0(X)$ è un R-modulo libero su tanti generatori quante sono le componenti connesse per archi di$X$.*

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 1.2.9 possiamo assumere che X sia connesso per archi. Scegliamo un punto base x_0 in X. Per ogni $x \in X$, sia σ_x un cammino da x_0 a x, tale che $\partial(\sigma_x) = x - x_0$. Data allora una 0-catena $c = \sum_x v_x x$ possiamo affermare che c è un bordo se e solo se la somma dei suoi coefficienti è zero. Se questo succede allora $c = \sum_x v_x x - (\sum_x v_x)x_0 = \partial(\sum v_x \sigma_x)$. L'inverso è chiaro. Ora ogni 0-catena è un ciclo. Dunque la mappa che manda c nella somma dei suoi coefficienti è un morfismo da S_0 in R con nucleo B_0, perciò $H_0(X) \cong R$. □

Consideriamo ora alcune proprietà funtoriali.

Sia $f : X \to X'$, se σ è un q-simplesso singolare in X, allora $f \circ \sigma$ è un q-simplesso singolare in X'. Otteniamo quindi un morfismo $S_q(f) : S_q(X) \to S_q(X')$ definito come segue: $S_q(f)(\sum v_\sigma \sigma) = \sum v_\sigma (f \circ \sigma)$.

Chiaramente valgono le seguenti:

1. $S_q(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{S_q(X)}$,
2. $S_q(gf) = S_q(g) \circ S_q(f)$.

Inoltre vale la seguente relazione:

Lemma 1.2.11. $\partial S_q(f) = S_{q-1}(f)\partial$.

Dimostrazione. Banale, si vede dall'associatività della composizione $\circ$. □

Perciò se z è un q-ciclo su X, $\bar{z}$ la sua classe di omologia, otteniamo un morfismo $H_q(f) : H_q(X) \to H_q(X')$ definito da $H_q(f)(\bar{z}) = \overline{S_q(f)(z)}$. Inoltre, poiché 1. e 2. valgono anche per $H_q(f)$, si vede che H_q è un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli R-moduli, per ogni $q \geq 0$. Dunque *i moduli di omologia sono invarianti topologici.*

1.3 Complessi di catene

In questa sezione estenderemo la costruzione di modulo di omologia a oggetti più generali, definiremo perciò i complessi di catene e la teoria omologica ad essi collegata, in particolare le catene di omotopie, le quali ci saranno utili per i risultati riguardanti i collegamenti tra gruppo di omologia e gruppo fondamentale. Vedremo infine le definizioni di aciclicità e asfericità.

Definizione 1.3.1. *Una* complesso di catene *su R è una sequenza $C = \{C_q, \partial_q\}$ di R-moduli liberi e morfismi $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ tali che $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, dove $C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$.*

Esempio 1.3.2. *Nel caso in cui $C_q = S_q(X)$, ossia il modulo delle q-catene singolari, e ∂_q sia la mappa bordo costruita precedentemente, otteniamo il complesso singolare di uno spazio X.*

Definizione 1.3.3. *Una sequenza di morfismi f_q con $f_q : C_q \to C'_q$ viene definita* mappa di catene *('chain map') se vale la seguente uguaglianza: $\partial_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$.*

Adesso, come nel caso topologico, siamo pronti per definire il q-esimo modulo di omologia di un complesso di catene. Prima di tutto introduciamo i sottomoduli di C_q definiti da $Z_q(C) = \ker(\partial_q)$, ossia il modulo dei q-cicli, e $B_q(C) = Im(\partial_{q+1})$, il modulo dei q-bordi.

Definizione 1.3.4. *Il q-esimo modulo di* omologia *di C è definito da*

$$H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C).$$

Ovviamente una mappa di catene $f : C \to C'$ manda cicli in cicli e bordi in bordi, per costruzione. Proprio per questo motivo è ben definito un morfismo indotto da f:

$$H_q(f) : H_q(C) \to H_q(C')$$
$$H_q(f)(\bar{z}) = \overline{f_q(z)}.$$

Abbiamo perciò visto che H_q definisce un funtore dalla categoria dei complessi di catene su R e mappe di catene alla categoria degli R-moduli e morfismi.

Definizione 1.3.5. *Un'* omotopia di catene *tra mappe di catene $f = \{f_q : C_q \to C'_q\}$ e $g = \{g_q : c_q \to c'_q\}$ è una sequenza $D = \{D_q : C_q \to C'_{q+1}\}$ di morfismi tali che $\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = f_q - g_q$.*

Scriveremo allora $f \simeq g$.

La seguente proposizione è di banale dimostrazione, infatti due mappe omotope (di omotopia di catene) differiscono a meno di un bordo.

Proposizione 1.3.6. *Se due mappe f e g sono omotope di omotopia di catene, allora inducono mappe uguali in omologia (quindi $H_q(f) = H_q(g)$ $\forall q \geq 0$).*

Nel caso in cui $X = \{P\}$ sia uno spazio puntiforme, si ha che $\mathrm{Im}(\partial_{q+1}) = \ker(\partial_q)$ per $q \geq 1$ e $S_0(P)/\mathrm{Im}(\partial_1) \cong R$. Vogliamo ora caratterizzare i complessi di catene che godono di una proprietà simile.

Definizione 1.3.7. *Un complesso di catene C si dice* aciclico *se $H_q(C) = 0$ per ogni q, ossia il q-esimo modulo di omologia di C è identicamente nullo al variare dell'indice q. Questo implica che $\mathrm{Im}(\partial_{q+1}) = \ker(\partial_q)$ per ogni q, chiaramente avendo posto $C_q = 0$ per ogni $q < 0$ avremo che $\mathrm{Im}(\partial_1) = C_0$. Ricordiamo inoltre che il termine* esatto *è usato come sinonimo di aciclico per un complesso di catene.*

Definizione 1.3.8. *Una* augmentazione *su R per un complesso di catene C tale che $C_q = 0$ per ogni $q < 0$ è un epimorfismo $\epsilon : C_0 \to R$ tale che $\epsilon\partial_1 = 0$, $C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} R$. Questo significa che $\mathrm{Im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon)$, dunque $C_0/\ker(\epsilon) \cong R$.*

Diciamo poi che un complesso di catene con augmentazione è aciclico se il suo complesso di catene ridotto è aciclico. Dove il complesso di catene ridotto di un complesso di catene C con augmentazione $\epsilon : C_0 \to R$ è $\tilde{C} = \{\tilde{C}_q, \tilde{\partial}_q\}$ ottenuto ponendo $\tilde{C}_q = C_q$ per $q \geq 1$, $\tilde{C}_0 = \ker(\epsilon)$ e $\tilde{\partial}_q = \partial_q$. Oppure equivalentemente, un complesso di catene con augmentazione è aciclico se valgono $\mathrm{Im}(\partial_{q+1}) = \ker(\partial_q)$ e $\mathrm{Im}(\partial_1) = \ker(\epsilon)$.

Cercheremo ora di mettere in relazione l'aciclicità con alcune omotopie di catene. Osserviamo che ogni augmentazione $\epsilon : C_0 \to R$ per un complesso C ha un inverso destro (che non è unico) $\eta : R \to C_0$ definito da $\eta(1) = x$, tale che x soddisfi a $\epsilon(x) = 1$. Allora avremo che $\epsilon\eta = \mathrm{Id}_R$ e potremo considerare $\eta\epsilon : C \to C$ come una mappa di catene definendo $\epsilon_{|C_q} = 0$ se $q \geq 1$.

Proposizione 1.3.9. *Se $\mathrm{Id}_R \simeq \eta\epsilon$ allora il complesso C è aciclico.*

Dimostrazione. Dall'equazione dell'omotopia di catene $\partial_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = \mathrm{Id}_R - \eta\epsilon$ possiamo dedurre che devono valere $\mathrm{Im}(\partial_{q+1}) = \ker(\partial_q)$ se $q \geq 1$ e $\mathrm{Im}(\partial_1) = \ker(\epsilon)$. Allora per quanto detto prima C è aciclico. □

Introduciamo ora una condizione geometrica su uno spazio X che implicherà l'aciclicità di $S(X)$.

Definizione 1.3.10. *Diciamo che X è* asferico *se ogni mappa continua $f : S^n \to X$ estende ad una $\bar{f} : D^{n+1} \to X$*

Esempi banali di spazi asferici sono un qualsiasi sottospazio convesso dello spazio euclideo e uno spazio contraibile.

Teorema 1.3.11. *Se uno spazio X è asferico, allora $S(X)$ è aciclico.*

Dimostrazione. L'idea è di costruire un'omotopia di catene $D = \{D_q\}$, $1 \simeq \eta\epsilon$, dove $\epsilon : S_0(X) \to R$ è l'augmentazione e $\eta : R \to S_0(X)$ una sua inversa destra.

La costruzione avviene per induzione su q, con $D_q(\sigma) \in S_{q+1}(X)$. Poniamo

$$D_0 F_1^0 = \sigma;\ D_0(\sigma)F_1^1 = \eta\epsilon(\sigma) \text{ per } q = 0$$

e

$$D_q F_{q+1}^0 = \sigma;\ D_q(\sigma)F_{q+1}^i = D_{q-1}(\sigma F_q^{i-1}) \text{ per } q \geq 1.$$

Non resta che verificare che tale applicazione 'si comporti bene' sul bordo dei simplessi e che sia effettivamente un'omotopia.

Sia $\dot{\Delta}_{q+1} \subset \Delta_{q+1}$ il bordo. Se ricordiamo che X è asferico, essendo $\dot{\Delta}_{q+1}$ omeomorfo a S^q e Δ_{q+1} a D_{q+1}, avremo che anche ogni mappa $\dot{\Delta}_{q+1} \to X$ estende ad una $\Delta_{q+1} \to X$. Perciò se ci limitiamo a considerare le intersezioni tra le facce in ogni $\dot{\Delta}_{q+1}$ è sufficiente verificare con alcuni semplici calcoli che valga l'uguaglianza

$$D_q(\sigma)F_{q+1}^i F_q^j = D_q(\sigma)F_{q+1}^j F_q^{i-1}.$$

La verifica dell'omotopia è immediata. □

1.4 Invarianza omotopica dell'omologia

In questa sezione vedremo che una proprietà fondamentale dell'omologia è la sua invarianza omotopica, ossia che mappe omotope inducono mappe uguali in omologia, come già abbiamo visto che avviene per mappe di catene omotope di omotopia di catene. In particolare si avrà che due spazi omotopicamente equivalenti possiedono q-esimi gruppi di omologia uguali per ogni q.

Teorema 1.4.1. *Se f e g sono mappe omotope $f, g : X \to Y$, allora $S(f)$ e $S(g)$ sono mappe omotope di omotopia di catene $S(f), S(g) : S(X) \to S(Y)$.*

Dimostrazione. Diamo solo un'idea della dimostrazione di questo teorema. Prima di tutto vogliamo semplificare le cose riducendoci a considerare solamente lo spazio X. Per fare questo supponiamo che sia H l'omotopia tale che $H : X \times I \to Y$ dove $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Siano poi i_0 e i_1 le inclusioni inferiore e superiore $X \to X \times I$, quindi avremo $f = H \circ i_0$ e $g = H \circ i_1$. Per le proprietà funtoriali di $S(f)$ ed $S(g)$ sarà quindi sufficiente dimostrare che sono omotope di omotopia di catene le due mappe $S(i_0)$ e $S(i_1)$ definite $S(X) \to S(X \times I)$. Il metodo per fare questo è costruire in modo induttivo l'omotopia di catene tra $S(X)$ e $S(X \times I)$, quindi $D_0(\sigma) = \sigma \times \mathrm{Id}$, mentre $D_q(\sigma) = S_{q+1}(\sigma \times \mathrm{Id}) \circ D_q(\delta_q)$. □

Teorema 1.4.2. *Se f e g sono mappe omotope $f, g : X \to Y$, allora per ogni $q \geq 0$, $H_q(f)$ e $H_q(g)$ sono uguali sui moduli di omologia.*

Dimostrazione. Basta considerare il teorema precedente e quanto abbiamo visto in merito a mappe omotope di omotopia di catene. Se f e g sono omotope, allora per il teorema precedente sono omotope di omotopia di catene $S(f)$ e $S(g)$. Questo per la Proposizione 1.3.6 implica che $H_q(f)$ e $H_q(g)$ mappe $H_q(X) \to H_q(Y)$ devono coincidere. □

Teorema 1.4.3. *Se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, allora per ogni $q \geq 0$, $H_q(f)$ è un isomorfismo da $H_q(X)$ in $H_q(Y)$.*

1.5 π_1 e H_1

Supponiamo da ora in poi che l'anello dei coefficienti considerato sia sempre quello degli interi $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.5.1. *Esiste un morfismo naturale $\chi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ che manda la classe di omotopia di un cappio γ nella classe di omologia dell'1-simplesso singolare γ. In particolare se X è connesso per archi, χ è suriettiva ed il suo* ker *è il sottogruppo dei commutatori del gruppo fondamentale.*

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione consiste nel mostrare che esiste ed è ben definita una mappa che alla classe di omotopia di un cappio γ su x_0 associa la classe di omologia dello stesso γ. Mostreremo in seguito che si tratta di un morfismo.

Supponiamo che γ e γ' siano due cappi su x_0 tali che $\gamma \simeq \gamma'$ $rel(0,1)$ tramite un'omotopia F. Ossia $F : I \times I \to X$ sia tale che $F(s,0) = \gamma(s)$, $F(s,1) = \gamma'(s)$, $F(0,t) = x_0$ e $F(1,t) = x_0$ per ogni s e t.

Definiamo un 2-simplesso singolare σ in X in modo che sia $\sigma(E_0) = x_0$.

Se adesso consideriamo la retta passante per E_0 ed un altro punto qualsiasi Q (purché diverso da E_0) del prodotto cartesiano infinito di $\mathbb{R}$, questa necessariamente intersecherà il lato opposto a E_0 in Δ_2 in un dato punto Q'. In particolare sarà

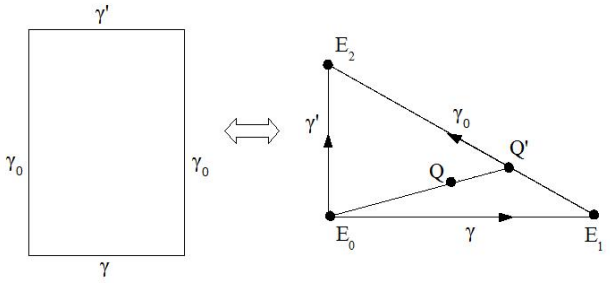
$$Q' = tE_2 + (1-t)E_1 \text{ e } Q = sQ' + (1-s)E_0.$$

Poniamo quindi $\sigma(Q) = F(s,t)$. Possiamo affermare che σ è continua perché, se consideriamo la mappa $G : I \times I \to \mathbb{R}^\infty$ che a (s,t) per $s \neq 0$ associa Q ed a $(0,t)$ associa E_0, possiamo osservare che $\Delta_2 = I^2/\sim_G$. Osservando il disegno risulta tutto più chiaro:

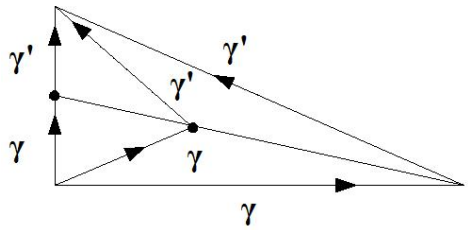
Quindi se γ_0 è il cappio costante su x_0 otteniamo che

$$\partial(\sigma) = \gamma - \gamma' + \gamma_0.$$

poiché γ_0 è il bordo del 2-simplesso banale su x_0 dalla formula precedente si vede che γ e γ' sono omologhi, in quanto differiscono a meno di un bordo (ovviamente somma di due bordi è un bordo).



Abbiamo così mostrato che la mappa χ è ben definita. Resta solo da verificare che questa sia un morfismo. Usiamo il diagramma sottostante per definire un 2-simplesso singolare σ tale che valga $\partial(\sigma) = \gamma + \gamma' - \gamma\gamma'$. Supponendo che $\gamma\gamma'$ sia definito.



Diventa quindi chiaro che la nostra mappa χ è anche un morfismo. Infatti, come si vede dalla formula, $\gamma + \gamma'$ e $\gamma\gamma'$ differiscono a meno di un bordo, ossia la classe di omologia di $\gamma\gamma'$ coincide con la somma in $H_1(X)$ della classe di omologia di γ e di quella di γ'.

Passiamo ora a dimostrare la seconda parte del teorema, supponiamo X connesso per archi. Mostriamo dapprima che χ è suriettiva. Consideriamo l'1-ciclo $z = \sum v_i\alpha_i$ tale che $0 = \sum v_i(\alpha_i(1) - \alpha_i(0)) = \partial(z)$. Osserviamo che, sommando i termini su i, si vede che necessariamente tutti i coefficienti v_i devono essere nulli.

Scegliamo poi un cammino η_{i0} da x_0 ad $\alpha_i(0)$ ed un altro η_{i1} da x_0 ad $\alpha_i(1)$ in modo che dipendano solo dai loro estremi e non dall'indicizzazione scelta. Se il punto iniziale o finale di qualcuno degli α_i è x_0 allora questo dev'essere il cammino costante.

Consideriamo adesso la somma $0 = \sum v_i(\eta_{i1} - \eta_{i0})$. Se poniamo $\beta_i = \eta_{i0} + \alpha_i - \eta_{i1}$, dalla formula precedente otteniamo che $0 = \sum v_i(\eta_{i1} - \eta_{i0}) = \sum v_i(\alpha_i - \beta_i)$, ma sapendo che $z = \sum v_i\alpha_i$ si ha che $z = \sum v_i\beta_i$.

Quindi, se γ_i è il cappio dato da $\eta_{i0}\alpha_i\eta_{i1}^{-1}$, abbiamo che (ricordiamo che con l'applicazione χ si passa anche da una notazione moltiplicativa ad una additiva) $\chi(\prod \gamma_i^{v_i}) = \bar{z}$.

Si vede così che ad ogni 1-ciclo è associabile almeno un cappio su x_0, questo solamente grazie alla connessione per archi di X. Altrimenti non potremmo

essere certi dell'esistenza degli η_{i0} e η_{i1}. Dunque se X è connesso per archi allora χ è suriettiva.

Veniamo all'ultima parte della dimostrazione; questa risulta un po' più ostica della precedente poiché richiede l'utilizzo di un 'lemma tecnico'.

Vogliamo ora identificare il $\ker(\chi)$ con il sottogruppo dei commutatori di $\Pi_1(X, x_0)$. Ricordiamo che il sottogruppo dei commutatori (o sottogruppo derivato)$[G, G]$ di un gruppo G è il più piccolo sottogruppo normale di G tale che $G/[G, G]$ è abeliano.

La difficoltà insita nella dimostrazione è riconoscere i commutatori quando sono espressi come prodotto di cammini. Supponiamo di avere un cappio γ espresso come $\prod_i \alpha_i^{\epsilon_i}$, dove gli α_i sono cammini non necessariamente distinti ed $\epsilon_i = \pm 1$.

Definiamo $exp(\alpha_i) = \sum_j \epsilon_j$, sommando su tutti i j tali che $\alpha_j = \alpha_i$.

Vediamo ora un breve lemma che ci servirà per proseguire la dimostrazione.

Lemma 1.5.2. *Se $exp(\alpha_i) = 0$ per ogni α_i fattore distinto di γ allora la classe di equivalenza omotopica di γ appartiene al sottogruppo dei commutatori di $\Pi_1(X, x_0)$, $[\gamma] \in [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$.*

Dimostrazione. Prendiamo come prima i cammini η_{i0} ed η_{i1} da x_0 a $\alpha_i(0)$ e $\alpha_i(1)$, sempre in modo che non dipendano dall'indicizzazione ma solo dai loro estremi. Si ha quindi che

$$\gamma = \prod_i \alpha_i^{\epsilon_i} \simeq \prod_i (\eta_{i0}\alpha_i\eta_{i1}^{-1})^{\epsilon_i} \ rel(0, 1).$$

Sia ora Π' il quoziente di $\Pi_1(X, x_0)$ con il suo sottogruppo dei commutatori e sia $\tilde{\gamma}$ la proiezione della classe di equivalenza omotopica $[\gamma]$ in Π'. Scrivendo come prima $\beta_i = \eta_{i0}\alpha_i\eta_{i1}^{-1}$ otteniamo che

$$\tilde{\gamma} = \sum_i \epsilon_i\tilde{\beta}_i = \sum_i exp(\alpha_i)\tilde{\beta}_i = \tilde{0},$$

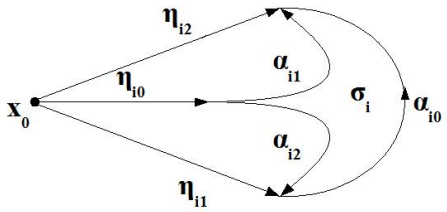
dove l'ultima somma è su classi di cammini distinte, ossia i β_i sono tutti distinti. Il che significa che è possibile vedere $\tilde{\gamma} = \gamma + [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)] = 0 + [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$, quindi $[\gamma] \in [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$. □

Possiamo ora proseguire con la dimostrazione del teorema. Mostriamo dapprima che $\ker(\chi) \subset [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)]$.Prendiamo perciò un cappio su x_0 omologo a zero, ossia un rappresentante della classe di omologia del cappio nullo. Avremo allora che $\gamma - 0 = \gamma = \partial(\sum v_i\sigma_i)$. Supponiamo poi di poter scrivere $\partial(\sigma_i) = \alpha_{i0} - \alpha_{i1} + \alpha_{i2}$ per determinati α_{ij} con $j = 0, 1, 2$ cammini su X. Perciò se vengono raggruppati tutti i termini della somma

$$\sum v_i(\alpha_{i0} - \alpha_{i1} + \alpha_{i2}) \tag{1.1}$$

si ottiene come risultato γ in quanto tutti gli altri cammini avranno coefficiente 0.

Scegliamo come prima i cammini η_{i0}, η_{i1} ed η_{i2} da x_0 rispettivamente ad $\alpha_{i2}(0)$, $\alpha_{i0}(0)$ e $\alpha_{i1}(1)$, sempre in modo che non dipendano dall'indicizzazione ma solamente dagli estremi. Prendiamo poi anche il cammino costante su x_0, come si vede in figura.



Consideriamo ora i cappi su x_0:

$$\beta_{i0} = \eta_{i1}\alpha_{i0}\eta_{i2}^{-1},$$

$$\beta_{i1} = \eta_{i0}\alpha_{i1}\eta_{i2}^{-1}$$

$$\beta_{i2} = \eta_{i0}\alpha_{i2}\eta_{i1}^{-1}.$$

Poniamo poi $\beta_i = \beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2}$.

Abbiamo allora che

$$\beta_i = \eta_{i1}\alpha_{i0}\eta_{i2}^{-1}\eta_{i2}\alpha_{i1}^{-1}\eta_{i0}^{-1}\eta_{i0}\alpha_{i2}\eta_{i1}^{-1} \simeq \eta_{i1}\alpha_{i0}\alpha_{i1}^{-1}\alpha_{i2}\eta_{i1}^{-1} \simeq x_0 \ rel(0,1).$$

Dove con x_0 indichiamo il cammino banale su x_0.

Perciò raggruppando i β_i con coefficienti dati dalla 1.1 otteniamo che dentro a $\Pi_1(X, x_0)$ è $\prod_i [\beta_i]^{v_i} = 1$, poiché per ogni i, β_i è omotopo al cammino banale su x_0. Inoltre, siccome l'unico termine della produttoria rimanente una volta raggruppati quelli uguali è γ, si ottiene che la composizione $\gamma(\prod_i \beta_i^{v_i})^{-1}$ soddisfa il lemma 1.5.2, perché raggruppando i fattori simili, i loro coefficienti si annullano tutti con quelli di γ. Basta osservare che $\beta_i^{v_i} \simeq \eta_{i1}^{v_i}(\alpha_{i0}\alpha_{i1}^{-1}\alpha_{i2})^{v_i}\eta_{i1}^{v_i}$, perciò da $\gamma(\prod_i \beta_i^{v_i})^{-1}$ resta $\gamma\eta_{i1}^{v_i}\gamma^{-1}\eta_{i1}^{-v_i}$ che banalmente soddisfa $exp(\gamma) = 0$ e $exp(\eta_{i1}) = 0$.

Applicando perciò il lemma otteniamo come risultato che dev'essere $[\gamma]$ appartenente al sottogruppo dei commutatori di $\Pi_1(X, x_0)$. Vediamo poi che, essendo X connesso per archi, $H_q(X)$ è commutativo e dunque $\ker(\chi)$ deve necessariamente contenere il sottogruppo dei commutatori di $\Pi_1(X, x_0)$. Infatti sia γ un commutatore, allora possiamo scrivere $\gamma = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ per $\alpha, \beta \in \Pi_1(X, x_0)$. Dunque se andiamo a valutare χ su questo elemento otteniamo che $\chi(\gamma) = \chi(\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta) = \chi(\alpha^{-1})\chi(\beta^{-1})\chi(\alpha)\chi(\beta) = -\chi(\alpha) - \chi(\beta) + \chi(\alpha) + \chi(\beta) = \tilde{0}$, poiché $H_1(X)$ abeliano. Dunque γ appartiene a $\ker(\chi)$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 1.5.3. *Se X è connesso per archi, allora χ è un isomorfismo se e solo se il gruppo fondamentale di X è commutativo.*

Vediamo ora come applicare quest'ultimo teorema in un caso semplice:

Esempio 1.5.4 (Omologia di $\mathbf{S^1}$). *Per la proposizione 1.2.10 abbiamo che $H_0(S^1)$ ha tanti generatori quante sono le componenti connesse per archi di S^1. Perciò, essendo S^1 connesso per archi, $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Consideriamo poi il secondo modulo di omologia della circonferenza, esso è isomorfo al gruppo fondamentale di S^1. Infatti, poiché S^1 è connesso per archi e $\Pi_1(S^1)$ è abeliano (in particolare è $\mathbb{Z}$), possiamo applicare il corollario precedente. Abbiamo quindi ottenuto che*

$$H_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Non è infatti difficile vedere che se $q \geq 2$ $Z_q(S^1) = B_q(S^1)$. Possiamo sempre pensare intuitivamente che l'immagine di un q+1-simplesso sulla sfera coincida con quella di una q-catena, che ne costituisce il bordo.

1.6 Omologia relativa

Sia A un sottospazio di uno spazio X. Allora per ogni $q \geq 0$, $S_q(A)$ è il sottomodulo di $S_q(X)$ che consiste delle combinazioni lineari di q-simplessi singolari $\Delta_q \to X$ che mappano proprio su A. Possiamo formare il modulo quoziente allora e, poiché l'operatore bordo manda $S_q(A)$ in $S_{q-1}(A)$, sarà indotto un morfismo $\bar{\partial}$ che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_q(X)/S_q(A) \arrow[d, "\bar{\partial}"] \\ S_{q-1}(X) \arrow[r] & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{tikzcd}$$

commutativo.

Quindi, sia $c \in S_q(X)$, poniamo $\bar{c}$ la classe di c modulo $S_q(A)$, allora definiamo $\bar{\partial}(\bar{c}) = \overline{\partial c}$ ossia la classe di $\partial c \in S_{q-1}(X)$ modulo $S_{q-1}(A)$. Chiaramente $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$.

Consideriamo ora i moduli

(a) $\ker(S_q(X)/S_q(A) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A))$;

(b) $\mathrm{Im}(S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A) \xrightarrow{\bar{\partial}} S_q(X)/S_q(A))$.

Poiché (b) è un sottomodulo di (a) formiamo di nuovo il modulo quoziente, denotato da $H_q(X, A)$ e chiamato *q-esimo modulo di omologia relativa* di X modulo A.

Possiamo anche ottenere questo modulo direttamente da $S_q(X)$ volendo. Si prende un $c \in S_q(X)$ e si suppone che $\bar{\partial}(\bar{c}) = \bar{0}$, chiaramente questo significa che $\partial c \in S_{q-1}(A)$. Chiamiamo l'insieme dei c di questo tipo $Z_q(X, A)$, che sarà un sottomodulo di $S_q(X)$ i cui elementi saranno chiamati q-cicli relativi su X modulo A.

Esempio 1.6.1. *Sia σ un cammino in X, allora chiaramente σ è un 1-ciclo relativo su X modulo A se i suoi estremi appartengono ad A. Più in generale un q-simplesso singolare è un q-ciclo relativo su X modulo A se le sue facce appartengono tutte ad A.*

Il modulo $Z_q(X, A)$ è la preimmagine tramite il morfismo quoziente del modulo (a). Ci chiediamo a questo punto quale sia la preimmagine di (b) tramite il medesimo morfismo. È facile vedere che questa è il sottomodulo $B_q(X, A)$ di $S_q(X)$ che consiste delle catene omologhe a catene in $S_q(A)$; queste vengono chiamate q-bordi relativi su X modulo A.

Lemma 1.6.2.

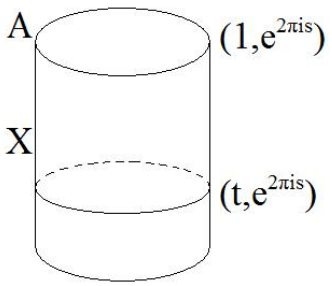
$$H_q(X, A) \cong \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)}.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema di isomorfismo

$$\frac{(M/P)}{(N/P)} \cong \frac{M}{N}.$$

□

Esempio 1.6.3. *Sia X il cilindro $I \times \mathbf{S^1}$ e sia A il sottospazio $\{1\} \times \mathbf{S^1}$, allora ogni cappio orizzontale $s \to (t, e^{2\pi i s})$ è un 1-bordo relativo poiché è omologo al cappio $s \to (1, e^{2\pi i s})$ in A.*



Osservazione 1.6.4. *Se $A = \emptyset$, per definizione $S_q(A) = 0$ per ogni q. Dunque $H_q(X, \emptyset) = H_q(X)$ e quindi ogni questione di omologia relativa include anche l'omologia assoluta come caso particolare.*

I moduli di omologia relativa sono funtoriali sulla coppia (X, A), perciò, data un'altra coppia (X', A') (d'ora in poi la parola coppia in omologia significherà

due spazi topologici tali che il secondo è un sottospazio del primo) e una mappa $f : (X, A) \to (X', A')$ (ossia una mappa $f : X \to X'$ tale che $f(A) \subset A'$), l'isomorfismo di catene indotto $S_q(f) : S_q(X) \to S_q(X')$ manda $S_q(A)$ in $S_q(A')$, dunque $Z_q(X, A)$ in $Z_q(X', A')$ e $B_q(X, A)$ in $B_q(X', A')$, quindi induce per passaggio al quoziente un isomorfismo $H_q(f) : H_q(X, A) \to H_q(X', A')$ tale che

- $H_q(\mathrm{Id}_{(X,A)}) = \mathrm{Id}_{H_q(X,A)}$;
- $H_q(fg) = H_q(f)H_q(g)$.

Esempio 1.6.5. *Abbiamo sempre una mappa $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ che sia la mappa identità su X, quindi un morfismo indotto*

$$H_j : H_q(X) \to H_q(X, A).$$

D'altra parte la mappa inclusione $i : A \to X$ induce un morfismo

$$H_q(i) : H_q(A) \to H_q(X).$$

Ci chiediamo qual'è il morfismo composto

$$H_q(ji) : H_q(A) \to H_q(X, A).$$

poiché $Z_q(A) \subset B_q(X, A)$ questo è il morfismo nullo.

Proposizione 1.6.6. *Sia (X_k) la famiglia di componenti connesse per archi di X, poniamo $A_k = X_k \cap A$, allora esiste un isomorfismo canonico per ogni $q \geq 0$*

$$H_q(X, A) \cong \bigoplus_k H_q(X_k, A_k).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è equivalente a quella del caso assoluto. Anche se ovviamente non è necessario che gli A_k siano connessi per archi. □

Proposizione 1.6.7. *Se $A \neq \emptyset$ e X è connesso per archi, allora $H_0(X, A) = 0$.*

Dimostrazione. Scegliamo $x_0 \in A$ e sia c una 0-catena in X, $c = \sum v_x x$. Scegliamo poi un cammino α_x da x_0 ad x per ogni $x \in X$. Allora $\partial(\sum v_x \alpha_x) = \sum v_x(x - x_0) = c - (\sum v_x)x_0$, quindi c è sempre omologa ad una 0-catena su A. Otteniamo quindi che $S_0(X) = B_0(X, A)$ che implica $Z_0(X, A) = B_0(X, A)$ e dunque $H_0(X, A) = 0$. □

Corollario 1.6.8. *Se (X_k) è la famiglia delle componenti connesse per archi di X, allora $X_0(X, A)$ è un modulo libero con tanti generatori quanti sono gli indici k per i quali vale $X_k \cap A = \emptyset$.*

Dimostrazione. Basta osservare che ogni volta che A_k è l'insieme vuoto vale $H_0(X_k, A_k) \cong R$. □

Definizione 1.6.9. *Due mappe $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sono* omotope *se esiste un'omotopia $H : X \times I \to Y$ tra f e g tale che H mappi $A \times I \to B$.*

Se poi $f_{|A} = g_{|A} = H_{|A \times I}$ allora scriveremo $f \simeq g$ rel A.

Osserviamo che le inclusioni superiore e inferiore

$$i_0, i_1 : (X, A) \to (X \times I, A \times I)$$

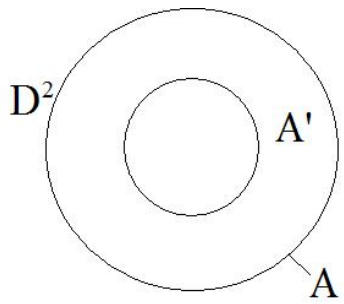
sono mappe di coppie e che una mappa

$$\overline{D_q} : S_q(X)/S_q(A) \to S_{q+1}(X \times I)/S_{q+1}(A \times I)$$

sui complessi singolari di catene viene indotta da una naturale omotopia di catene tra $S(i_0)$ e $S(i_1)$.

Proposizione 1.6.10. *Mappe di coppie omotope $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ inducono mappe uguali in omologia.*

Esempio 1.6.11. *Sia $X = X'$ il disco chiuso D^2, A la circonferenza $\mathbf{S^1}$ e $A' \supset A$ l'anello chiuso definito da $\frac{1}{2} \leq ||z|| \leq 1$.*



Affermiamo che la mappa di inclusione $f : (X, A) \to (X', A')$ è un'equivalenza omotopica, dunque per ogni q

$$H_q(f) : H_q(X, A) \to H_q(X', A')$$

è un isomorfismo. Definiamo ora $g : (X', A) \to (X, A)$ come

$$g(z) = \begin{cases} 2z & se\ ||z|| \leq \frac{1}{2} \\ e^{i\theta} & se\ z = re^{i\theta}\ con\ \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Dobbiamo mostrare che fg e gf sono omotope alle mappe identità (rispettivamente su (X', A') e su (X, A)). Definiamo quindi un'omotopia $F_t : fg \simeq \mathrm{Id}_{(X',A')}$ in questo modo:

$$F_t(z) = \begin{cases} (1+t)z & se\ ||z|| \leq \frac{1}{1+t} \\ e^{i\theta} & se\ z = re^{i\theta}\ con\ \frac{1}{1+t} \leq r \leq 1 \end{cases}$$

e un'omotopia $G_t : gf \simeq \mathrm{Id}_{(X,A)}$ come:

$$G_t(z) = \begin{cases} (1+t)z & se\ ||z|| \leq \frac{1}{2} \\ (\frac{1+s+t-st}{2})e^{i\theta} & se\ z = (\frac{1+s}{2})e^{i\theta}\ con\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

.

1.7 La sequenza omologica esatta

La proprietà più importante dei moduli di omologia relativa $H_q(X, A)$ è l'esistenza di un *morfismo di collegamento*

$$H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$$

attraverso il quale otteniamo una sequenza infinita di morfismi

$$\cdots \to H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) \to \dots$$

chiamata *sequenza omologica della coppia* (X, A).

Definiamo perciò il morfismo di collegamento come segue. Dato un q-ciclo relativo z rappresentante una determinata classe di equivalenza omologica $\bar{z}$, per definizione ∂z è una (q-1)-catena su A, ma poiché $\partial\partial = 0$, ∂z è in effetti un (q-1)-ciclo su A, e possiamo considerarne la classe di omologia $\overline{\partial z} \in H_{q-1}(A)$. Questa classe dipende solo da $\bar{z}$: se $z \sim z'$ modulo A, allora $z = z' + w + \partial z''$ dove w è una q-catena su A, z'' una (q+1)-catena su X; allora $\partial z = \partial z' + \partial w$, ossia ∂z e $\partial z'$ sono omologhi su A. Definiamo perciò il morfismo di collegamento, indicato anch'esso da ∂, come $\partial \bar{z} = \overline{\partial z}$.

Teorema 1.7.1. *La sequenza omologica di (X, A) è esatta.*

Osserviamo che questo significa che:

- la composizione di due morfismi nella sequenza è nulla;
- l'immagine di un morfismo coincide con il nucleo del morfismo successivo.

Dimostrazione. Verifichiamo l'esattezza nel nodo $H_q(X, A)$. Sia z un q-ciclo su X, ossia $\partial z = 0$, allora posta $\bar{z}$ la sua classe di omologia si ha che $\partial H_q(j)(\bar{z}) = \overline{\partial z} = 0$ in $H_{q-1}(A)$, cosicché la composta $\partial H_q(j)$ è nulla e la prima condizione è soddisfatta. Consideriamo ora un q-ciclo relativo z tale che l'immagine $\partial \bar{z}$ di $\bar{z}$ tramite il morfismo di collegamento sia nulla. Questo significa che $\partial z = \partial w$, dove w è una q-catena su A, da cui deduciamo che $z - w$ è un q-ciclo su X. Inoltre la classe di omologia relativa di $z - w$ è la stessa di z siccome z e $z - w$ differiscono a meno di un q-bordo relativo modulo A, perciò $H_q(j)(\overline{z - w}) = \bar{z}$, il che mostra chiaramente che l'immagine di $\partial H_q(j)$ coincide con il nucleo di ∂.

Vediamo cosa succede nel nodo $H_{q-1}(A)$. Consideriamo $\bar{z}$ la classe relativa di un ciclo di $H_q(X, A)$, e ci chiediamo cosa sia $H_{q-1}(i)\partial(\bar{z})$. Poiché, essendo z un q-ciclo relativo su (X, A), esso sarà in particolare un ciclo su X, dev'essere $H_{q-1}(i)\partial(\bar{z}) = 0$, che implica che la composizione $H_{q-1}(i)\partial$ dev'essere nulla. Vediamo ora cos'è il nucleo dell'applicazione $H_{q-1}(i)$, esso è costituito dai (q-1)-cicli su A omologhi a 0 in X, ossia è l'insieme $\{\sigma \in H_{q-1}(A) : \sigma = \partial\phi$, per qualche $\phi \in S_q(X)\}$. Ma banalmente l'immagine di ∂ non è altro che l'insieme dei $\sigma = \partial\alpha$ per $\alpha \in H_q(X, A)$ che è quindi uguale al nucleo di $H_{q-1}(i)$. Abbiamo visto che anche nel nodo $H_{q-1}(A)$ la sequenza omologica è esatta. $\square$

Osservazione 1.7.2. *La sequenza omologica finisce sulla destra con*

$$\cdots \to H_0(X) \xrightarrow{H_0(j)} H_0(X, A) \to 0.$$

L'esattezza in $H_0(X, A)$ significa che l'immagine di $H_0(j)$ coincide con il nucleo del morfismo nullo, ossia che $H_0(j)$ è suriettiva.

Esempio 1.7.3. *Se A è uno spazio puntiforme $\{x_0\}$ in X, allora $H_q(X) \to H_q(X, x_0)$ è un isomorfismo per ogni $q > 0$. Infatti se A è un singolo punto $H_q(A) = 0$ per ogni $q > 0$, per cui $\forall q \geq 2$*

$$0 \to H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, x_0) \to 0$$

è esatta, il che implica che $H_q(j)$ sia un isomorfismo. Per $q = 1$ lo zero a destra dev'essere sostituito da $H_0(x_0) \cong R$, ma da questo segue chiaramente che

$$\partial : H_1(X, x_0) \to H_0(x_0)$$

dev'essere la mappa nulla, dunque $H_1(j)$ è comunque un isomorfismo.

Esempio 1.7.4. *Sia X il disco n-dimensionale $D^n = \{v \in \mathbb{R}^n : ||v|| \leq \}$ e sia $A = \mathbf{S^{n-1}}$ la sua frontiera. Poiché D^n è contraibile $H_q(D^n) = 0$ per ogni $q \geq 1$, perciò per la sequenza omologica esatta*

$$\partial : H_q(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) \to H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 2$. Per $q = 1$ otteniamo

$$0 \to H_1(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_0(\mathbf{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(D^n) \to 0.$$

Per $n > 1$, $\mathbf{S}^{n-1}$ è connesso per archi e vediamo che $H_1(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) = 0$. Infatti se proviamo a considerare il caso $n = 2$ abbiamo $\mathbf{S}^1$ connesso per archi, ci chiediamo cosa sia $H_1(D^2, \mathbf{S}^1)$. Poiché $H_0(D^2) \cong R$ e siccome $\mathbf{S}^1$ connesso per archi implica anche $H_0(\mathbf{S}^1) \cong R$, chiaramente $H_0(i)$ è un isomorfismo. Dunque il fatto che il nucleo di $H_0(i)$ che coincide con l'immagine di ∂ sia banale ci dice che $H_1(D^2, \mathbf{S}^1) = 0$. Per il caso $n = 1$ otteniamo $H_1(D^1, \mathbf{S}^0) \cong R \cong \ker(H_0(\mathbf{S}^0) \to H_0(D^1))$.

Proposizione 1.7.5. *La sequenza omologica è funtoriale sulla coppia (X, A).*

Dimostrazione. La funtorialità significa che una qualsiasi mappa $f : (X, A) \to (X', A')$ induce una sequenza infinita di diagrammi commutativi tra le sequenze omologiche delle due coppie (X, A) e (X', A'). Per quanto visto finora basta verificare che il diagramma

$$\begin{tikzcd} H_q(X, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{q-1}(A) \arrow[d] \\ H_q(X', A') \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(A') \end{tikzcd}$$

sia commutativo, ma questo è immediato e segue direttamente dal fatto che i morfismi di catene $S_q(f)$ commutano con l'operatore bordo. $\square$

1.8 Il teorema di escissione e l'omologia di $\mathbf{S}^n$

Il teorema di escissione afferma che certi sottospazi $U \subset A$ possono venire tagliati via o (escissi) dallo spazio senza influire sui moduli di omologia relativa. In pratica la mappa di inclusione $i : (X - U, A - U) \to (X, A)$ è detta un'*escissione* se induce un isomorfismo

$$H_q(i) : H_q(X - U, A - U) \to H_q(X, A)$$

per ogni q.

Prima di enunciare il primo risultato ricordiamo che un sottospazio $A \subset X$ è un retratto se esiste una mappa $r : X \to A$ tale che $ri = \mathrm{Id}_A$, dove $i : A \to X$ è la mappa di inclusione.

Teorema 1.8.1. *Siano $V \subset U \subset A$, se*

(i) *V può venire escisso;*

(ii) *$(X - U, A - U)$ è un retratto di deformazione di $(X - V, A - V)$;*

allora U può venire escisso.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $i : (X - U, A - U) \to (X, A)$ induce un isomorfismo $H_q(i) : H_q(X - U, A - U) \to H_q(X, A)$ per ogni q. Per l'ipotesi (ii) sappiamo che esiste r tale che $ri' = \mathrm{Id}_{(X-U,A-U)}$, dove i' è l'inclusione di $(X - U, A - U)$ in $(X - V, A - V)$ e $r : (X - V, A - V) \to (X - U, A - U)$, e che V può venire escisso, ossia che la mappa $i'' : (X - V, A - V) \to (X, A)$ induce un isomorfismo $H_q(i'') : H_q(X - V, A - V) \to H_q(X, A)$ per ogni q. Consideriamo

$$(X - V, A - V) \xrightarrow{r} (X - U, A - U) \xrightarrow{i'} (X - V, A - V)$$

, la mappa $i'r$ è omotopa ad $\mathrm{Id}_{(X-V,A-V)}$ e per il teorema di omotopia $H_q(i'r) = H_q(\mathrm{Id}_{(X-V,A-V)})$ per ogni q. Perciò otteniamo che $H_q(i')$ è un isomorfismo, dunque per la funtorialità di H_q da $i = i''i'$ otteniamo che $H_q(i)$ è un isomorfismo e che $(X - U, A - U) \to (X, A)$ è un'escissione. □

Enunciamo ora un risultato molto importante di cui tuttavia non forniamo la dimostrazione. Questa infatti necessita di buona parte della restante teoria dell'omologia relativa di cui non ci occupiamo in quanto non strettamente necessaria al raggiungimento del nostro scopo in questo testo.

Teorema 1.8.2 (di escissione)**.** *Se la chiusura di U è contenuta nell'interno di A, allora U può venire escisso.*

Teorema 1.8.3. *Siano D_n^+ e D_n^- gli emisferi chiusi superiore e inferiore della n-sfera $\mathbf{S}^n$, con $n \geq 1$ (tali che la loro intersezione $D_n^+ \cap D_n^- = \mathbf{S}^{n-1}$ sia l'equatore di $\mathbf{S}^n$), allora*

$$(D_n^+, \mathbf{S}^{n-1}) \to (\mathbf{S}^n, D_n^-)$$

è un'escissione.

Dimostrazione. L'escissione considerata taglia via l'emisfero sud aperto che chiameremo $U = \{x \in \mathbf{S}^n : x_{n+1} < 0\}$, quindi è $(\mathbf{S}^n - U, D_n^- - U) \to (\mathbf{S}^n, D_n^-)$. Non possiamo applicare direttamente il teorema di escissione in questo caso poiché $\overline{U}$ non è contenuta nell'interno di D_n^-, infatti $\overline{U} = D_n^-$. Consideriamo allora $V = \{s \in \mathbf{S}^n : x_{n+1} < -\frac{1}{2}\}$, questa volta $\overline{V}$ è contenuto nell'interno di D_n^-, perciò può venire escisso. Inoltre $(D_n^+, \mathbf{S}^{n-1})$ è chiaramente un retratto di deformazione di $(\mathbf{S}^n - V, D_n^- - V)$, dunque per il teorema 1.8.1 U può venire escisso. $\square$

Riprendiamo ora $(\mathbf{S}^n, D_n^-)$, proiettando sulle prime n coordinate si ottiene $(D^n, \mathbf{S}^{n-1})$. Da cui,componendo con l'inclusione di 1.8.3, un omeomorfismo $(D_n^+, \mathbf{S}^{n-1}) \to (D^n, \mathbf{S}^{n-1})$. Ricordiamo che abbiamo visto in precedenza che il morfismo di collegamento

$$H_q(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) \to H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 2$.

Ora, siccome D_n^- è contraibile, abbiamo che anche

$$H_q(\mathbf{S}^n) \to H_q(\mathbf{S}^n, D_n^-)$$

è un isomorfismo per $q \geq 2$. Infatti D_n^- contraibile implica $H_q(D_n^-) \cong 0$ per ogni $q \geq 1$, quindi si ha la successione

$$0 \to H_q(\mathbf{S}^n) \to H_q(\mathbf{S}^n, D_n^-) \to 0$$

, dunque l'isomorfismo tra $H_q(\mathbf{S}^n)$ e $H_q(\mathbf{S}^n, D_n^-)$.

Se combiniamo queste due affermazioni con il teorema 1.8.3 otteniamo un isomorfismo $H_q(\mathbf{S}^n) \cong H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$ per ogni $q \geq 2$ e $n \geq 1$.

Consideriamo il caso $q = 1$. Ricordiamo che per $n \geq 1$ si ha

$$H_1(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } n > 1 \\ R & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Perciò nel caso $q = 1$ e $n \geq 1$ si ha la sequenza

$$0 \to H_1(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{a} H_1(\mathbf{S}^n, D_n^-) \xrightarrow{b} H_0(D_n^-) \xrightarrow{c} H_0(\mathbf{S}^n) \to 0,$$

infatti $H_1(D_n^-) \cong 0$ perchè D_n^- è contraibile e $H_0(\mathbf{S}^n, D_n^-) \cong 0$ perchè $D_n^- \neq \emptyset$ e $\mathbf{S}^n$ è connesso per archi. Osserviamo poi che, essendo sia D_n^- che $\mathbf{S}^n$ connessi per archi, i loro 0-esimi moduli di omologia sono entrambi isomorfi a R e dunque il morfismo c è in effetti un isomorfismo. Se adesso ricordiamo che, per l'esattezza della sequenza omologica, dev'essere $\mathrm{Im}(b) = \ker(c) = 0$, otteniamo che $\ker(b) = H_1(\mathbf{S}^n, D_n^-) = \mathrm{Im}(a)$ ossia a suriettiva. Dunque, dato che $\ker(a) = \mathrm{Im}(0 \to H_1(\mathbf{S}^n))$, possiamo affermare che anche a è un isomorfismo. Banalmente b è invece il morfismo nullo.

Corollario 1.8.4. *Per $q \geq 1$ e $n \geq 1$*

$$H_q(\mathbf{S}^n) \cong \begin{cases} R & se\ q = n \\ 0 & se\ q \neq n \end{cases}$$

Dimostrazione. Vediamo che succede se $q \geq 2$ e $n \geq 1$, consideriamo due casi: $q = n$ e $q \neq n$. Se $q = n$ $H_n(\mathbf{S}^n) \cong H_q(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) \cong H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$, perciò basta vedere cos'è $H_2(S^2) \cong H_2(D^2, \mathbf{S}^1) \cong H_1(\mathbf{S}^1) \cong R$. Se invece $q \neq n$ abbiamo $H_q(\mathbf{S}^n) \cong H_q(D^n, \mathbf{S}^{n-1}) \cong H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$ e anche in questo caso è sufficiente vedere cos'è $H_2(S^1) \cong H_2(D^1, \mathbf{S}^0) \cong H_1(\mathbf{S}^0) \cong 0$.

Resta da vedere cosa succede se $q = 1$ e sempre $n \geq 1$. Abbiamo visto che $H_1(\mathbf{S}^n) \cong H_1(\mathbf{S}^n, D^n)$, ma sappiamo che se $\Pi_1(\mathbf{S}^n)$ è abeliano allora esiste un isomorfismo tra $\Pi_1(\mathbf{S}^n)$ e $H_1(\mathbf{S}^n)$. Consideriamo anche questa volta due casi come prima. Se $q = n$, $H_1(\mathbf{S}^1) \cong R$; se invece $q \neq n$, ossia $n > 1$, $\mathbf{S}^n$ è semplicemente connesso, perciò $\Pi_1(\mathbf{S}^n) \cong 1$ è abeliano. In questo caso si ha l'isomorfismo e deduciamo che $H_1(\mathbf{S}^n) \cong 0$. □

1.9 I Numeri di Betti e la Caratteristica di Eulero

Supponiamo sempre di essere nel caso in cui l'anello dei coefficienti R è $\mathbb{Z}$, questo implica per alcuni spazi che i loro gruppi di omologia sono finitamente generati. Sia ora A un gruppo abeliano finitamente generato, il teorema 1.1.11 richiamato nella sezione preliminare asserisce che, se consideriamo gli elementi di ordine finito in A, questi formano il sottogruppo di torsione T e dunque che il gruppo quoziente A/T è abeliano libero. Il numero minimo di generatori di A/T viene chiamato *rango* di A sull'anello R.

Definizione 1.9.1. *Definiamo il* q-esimo numero di Betti β_q *di uno spazio X come il rango di $H_q(X)$ sull'anello R.*

Perciò il q-esimo numero di Betti di X non è altro che il numero di elementi di una base del gruppo libero $H_q(X)/H_q(X)_{tor}$.

Definizione 1.9.2. *Chiamiamo* caratteristica di Eulero *di uno spazio X l'intero $\chi(X)$, dato dalla formula*

$$\chi(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q$$

quando questa somma è finita.

Questi numeri sono, ovviamente, invarianti topologici.

Esempio 1.9.3. *Per $\mathbf{S}^n$ si ha che $\beta_0 = \beta_n = 1$, mentre tutti gli altri $\beta_q = 0$. Otteniamo perciò*

$$\chi(\mathbf{S}^n) = \begin{cases} 0 & se\ n\ dispari \\ 2 & se\ n\ pari \end{cases}$$

È possibile definire in maniera simile i numeri di Betti relativi e la caratteristica di Eulero relativa $\chi(X, A)$ per una coppia (X, A).

Lemma 1.9.4. *Quando questi interi sono definiti*

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A).$$

Dimostrazione. Grazie alla sequenza omologica esatta della coppia (X, A)

$$\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) \to \dots$$

è possibile semplificare la dimostrazione di questo lemma riducendosi ad un altro lemma puramente algebrico (del quale tuttavia non forniamo la dimostrazione, pur osservando che si procede per induzione su r).

Lemma 1.9.5. *Data una sequenza esatta di gruppi abeliani finitamente generati*

$$0 \to A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} \cdots \xrightarrow{i_{r-1}} A_r \to 0$$

allora

$$rango(A_1) - rango(A_2) + \cdots + (-1)^{r+1} rango(A_r) = 0.$$

□

Capitolo 2

Il teorema di Poincaré-Hopf

2.1 L'indice di un campo vettoriale e il teorema di Poincaré-Hopf

Prima di introdurre il concetto di indice di un campo vettoriale su un manifold, necessario per comprendere il teorema principale, riprendiamo alcune nozioni preliminari di teoria del grado.

Ricordiamo che un manifold liscio orientato non è altro che un manifold M con una scelta di orientazione per ogni spazio tangente TM_x, $x \in X$. Essendo poi lo spazio tangente ad un manifold uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, per esso un'orientazione non è altro che la scelta di una classe di equivalenza per le sue basi data dalla relazione: $(b_1, \ldots, b_n) \sim (b'_1, \ldots, b'_n) \Leftrightarrow b'_i = \sum a_{ij} b_j$ con $\det(a_{ij}) > 0$, dove $(b_1, \ldots, b_n)$ e $(b'_1, \ldots, b'_n)$ sono basi di un qualche spazio tangente TM_x. Inoltre un'orientazione sul manifold M determina univocamente un'orientazione sul suo bordo ∂M (se M è un manifold con bordo) se si impone che i vettori tangenti al bordo siano orientati verso l'esterno del manifold.

Definizione 2.1.1. *Siano M e N due manifold n-dimensionali orientati e senza bordo e sia $f : M \to N$ una mappa liscia. Se M è compatto e N è connesso, allora il grado di f è definito come segue. Dato $x \in M$ un punto regolare per f, cosicché $df_x : TM_x \to TN_{f(x)}$ è un isomorfismo lineare tra spazi vettoriali orientati, definiamo il* segno *di df_x come $+1$ o -1 rispettivamente a seconda che df_x preservi o inverta l'orientazione. Definiamo quindi per ogni valore regolare $y \in N$*

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{segno}(df_x).$$

Ricordiamo che il grado di un morfismo differenziabile tra manifold è costante sull'insieme dei valori regolari e che due mappe omotope in maniera differenziabile hanno sempre lo stesso grado.

Consideriamo ora un campo vettoriale liscio v su un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$,

$$v : U \to \mathbb{R}^m$$

con uno zero isolato nel punto $z \in U$. La funzione $\bar{v}(x) \stackrel{def}{=} v(x)/||v(x)||$ allora mappa una sferetta centrata in z nella sfera unitaria.

Definizione 2.1.2. *Definiamo* indice *del campo v nello zero z il grado della mappa $\bar{v}$.*

Mostriamo che quella appena vista è una definizione ben posta. Ciò che è necessario comprendere, e che a prima vista può non sembrare banale, è che questo intero non dipende dalla sferetta centrata in z scelta. Ossia che, definita $\bar{v}$ come sopra, date due sferette S_ϵ e S_δ concentriche centrate in uno stesso zero z, $\bar{v} : S_\epsilon^{m-1}(z) \to S^{m-1}(z)$ e $\bar{v} : S_\delta^{m-1}(z) \to S^{m-1}(z)$, che chiameremo per distinguerle $\bar{v}_\epsilon$ e $\bar{v}_\delta$, hanno lo stesso grado.

Ricordiamo innanzitutto il seguente.

Teorema 2.1.3. *Siano X un manifold compatto e orientato, $M = \partial(X)$ e N un manifold connesso, orientato. Se $f : M \to N$ è una mappa liscia che si estende ad un'altra $F : X \to N$, allora* $\deg(f; y) = 0$ *per ogni valore regolare y di f.*

Consideriamo il manifold X, con bordo costituito dalle due sferette S_ϵ e S_δ e con interno lo spazio tra le due, risulta banale vedere che $\bar{v}$ si estende in maniera differenziabile su di esso. Osserviamo poi che $\partial(X) = S_\epsilon \cup S_\delta$ coerentemente orientate. Possiamo perciò applicare il risultato citato poco fa e affermare che $\deg(\bar{v}) = 0$. Se seguiamo il ragionamento della dimostrazione del teorema (che è possibile trovare in [1] pag.28) allora $\bar{v}^{-1}(y)$ è unione finita di cappi e archi che hanno estremi sul bordo di X, quindi sulle due sferette. Sappiamo poi che dev'essere $\deg(\bar{v}) = 0$, perciò se sommiamo segno $d\bar{v}_x$ sui punti regolari $x \in \partial(X)$ otteniamo che

$$\sum_{a \in S_\epsilon} \text{segno}\, d\bar{v}_a - \sum_{b \in S_\delta} \text{segno}\, d\bar{v}_b = 0$$

il che implica che $\deg(\bar{v}_\epsilon) = \deg(\bar{v}_\delta)$. C. v. d.

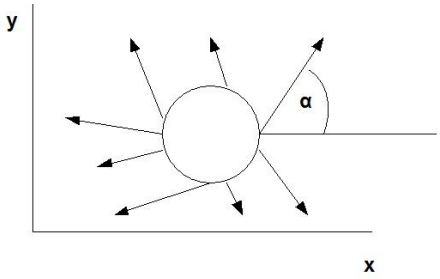
Possiamo comprendere meglio la nozione di indice senza fare riferimento al grado di Brouwer, restringendoci al caso in cui $v : U \to \mathbb{R}^2$, ossia al caso di un campo vettoriale piano.

Se consideriamo un campo vettoriale piano, ad ogni punto, tranne al più un numero finito, è assegnata univocamente una direzione ben precisa, data dai vettori tangenti al campo nei vari punti. Riusciamo così a costruire una funzione

continua sul suo insieme di definizione. I punti che non rientrano in tale insieme sono chiamati punti singolari del campo.

Definiamo l'indice di un punto singolare nel modo seguente.

Fissato un riferimento cartesiano sul piano, disegniamo un cerchio intorno al punto singolare abbastanza piccolo da non contenere altre singolarità del campo vettoriale nel suo interno o sulla sua circonferenza. Prendiamo un punto arbitrario sulla circonferenza e consideriamo l'angolo α che il vettore tangente al campo in quel punto forma con la direzione positiva dell'asse x. Ovviamente α è univocamente determinato modulo 2π.

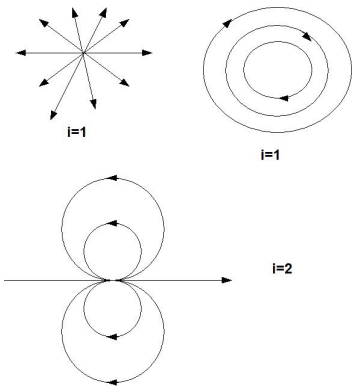


Dopo aver fissato il valore di α, l'angolo che il vettore tangente al campo in ogni punto successivo della circonferenza forma con la direzione positiva dell'asse x può essere univocamente determinato se richiediamo che sia una funzione continua della lunghezza dell'arco sulla circonferenza del cerchio. Consideriamo allora la variazione totale di α a partire dal punto iniziale scelto dopo aver compiuto un giro completo sulla circonferenza fino a tornare in quello stesso punto. Questo valore sarà un multiplo di 2π. Ossia

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi j.$$

Definiamo allora indice del punto singolare l'intero j.

Diventa quindi banale comprendere perché le seguenti rappresentazioni di campi vettoriali piani hanno gli indici di figura.



Uno zero con indice arbitrario può essere costruito come segue. Nel piano complesso il polinomio z^k definisce un campo vettoriale liscio con uno zero di indice k nell'origine, mentre la funzione $\bar{z}^k$ definisce un campo vettoriale con uno zero di indice $-k$.

Mostreremo ora che questo concetto di indice è invariante per diffeomorfismi su U. Per capire il significato di questa affermazione consideriamo il caso più generale di una mappa tra manifold $f : M \to N$, con un campo vettoriale su ciascun manifold.

Definizione 2.1.4. *I campi vettoriali v su M e v' su N* corrispondono *tramite f se la derivata df_x manda $v(x)$ in $v'(f(x))$ per ogni $x \in M$.*

Se f è un diffeomorfismo, allora chiaramente v' è univocamente determinato da v. Useremo perciò la notazione $v' = df \circ v \circ f^{-1}$.

Lemma 2.1.5. *Sia v un campo vettoriale su U corrispondente a $v' = df \circ v \circ f^{-1}$ su U' tramite il diffeomorfismo $f : U \to U'$. Allora l'indice di v in uno zero isolato z è uguale a quello di v' in $f(z)$.*

Assumendo il lemma 2.1.5 è possibile definire il concetto di indice per un campo vettoriale w su un manifold arbitrario M come segue. Se $g : U \to M$ è una parametrizzazione di un intorno di z in M, allora l'indice i di w in z è definito come uguale all'indice del corrispondente campo vettoriale $dg^{-1} \circ w \circ g$ su U nello zero $g^{-1}(z)$. Segue chiaramente dal lemma 2.1.5 che i è ben definito.

La dimostrazione del lemma 2.1.5 si basa sul seguente risultato:

Lemma 2.1.6. *Qualsiasi diffeomorfismo che preserva l'orientazione f su $\mathbb{R}^m$ è isotopo in maniera differenziabile all'identità.*

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere di generalità che $f(0) = 0$. Allora la derivata di f in 0 può essere definita come $df_0(x) = \lim_{t\to 0} f(tx)/t$ e risulta naturale definire un'isotopia

$$F : \mathbb{R}^m \times [0,1] \to \mathbb{R}^m$$

come segue

$$F(x,t) = f(tx)/t \text{ per } 0 < t \leq 1,$$

$$F(x,0) = df_0(x).$$

Per mostrare che F è liscia, anche per $t \to 0$, scriviamo f nella forma $f(x) = x_1 g_1(x) + \cdots + x_m g_m(x)$, dove $g_1, \ldots g_m$ sono mappe lisce opportune. Sappiamo che queste mappe esistono grazie ad un teorema che è possibile trovare in [2] pag.5. Notiamo che per ogni t vale

$$F(x,t) = \begin{cases} f(tx)/t & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ \lim_{t\to 0} f(tx)/t & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Ossia

$$F(x,t) = x_1 g_1(tx) + \cdots + x_m g_m(tx).$$

Perciò f è isotopa a df_0, che è chiaramente isotopa all'identità. $\square$

Passiamo ora alla dimostrazione del lemma 2.1.5.

Dimostrazione. Assumiamo che $z = f(z) = 0$ e che U sia convesso. Se f preserva l'orientazione, allora, procedendo esattamente come sopra, possiamo costruire una famiglia dipendente da un parametro di embedding

$$f_t : U \to \mathbb{R}^m$$

con

$$f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m},$$

$$f_1 = f$$

$$\text{e } f_t(0) = 0$$

per ogni t. Ricordiamo che $f_t(x)$ è $F(t,x)$ fissato t, quindi

$$f_t(x) = \begin{cases} f(tx)/t & 0 < t \leq 1 \\ \lim_{t\to 0} f(tx)/t & t = 0 \end{cases},$$

ossia un diffeomorfismo per ogni t. Sia poi v_t il campo vettoriale $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$ su $f_t(U)$ corrispondente a v su U. Questi campi vettoriali sono tutti definiti e non nulli su una sfera sufficientemente piccola centrata in 0. Questo ci basta per provare il lemma per diffeomorfismi che preservano l'orientazione.

Consideriamo adesso morfismi che invertono l'orientazione. Ci basta restringerci al caso particolare di una riflessione ρ. Allora avremo che se $v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1}$, la funzione associata $\bar{v}'(x) = v'(x)/||v'(x)||$ su una ϵ-sfera soddisfa a $\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}$.

Risulta evidente che il grado di $\bar{v}'$ è uguale al grado di $\bar{v}$, il che completa la dimostrazione del lemma 2.1.5. $\square$

Passiamo ora al risultato più importante, il teorema che dà il titolo a quest'ultimo capitolo.

Teorema 2.1.7 (Poincaré-Hopf)**.** *Sia M un manifold compatto e w un campo vettoriale liscio su M con zeri isolati. Se M ha bordo, allora verrà richiesto che w punti verso l'esterno del manifold in tutti i punti del bordo.*

La somma $\sum$i degli indici negli zeri di un tale campo vettoriale è allora uguale alla caratteristica di Eulero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \beta_i.$$

Dove ricordiamo che i β_i non sono altro che il rango degli $H_i(M)$.

In particolare questa somma di indici è un invariante topologico per M: non dipende dalla scelta del campo vettoriale su M.

Consideriamo dapprima il caso in cui il manifold considerato sia compatto e contenuto in $\mathbb{R}^m$.

Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ un m-manifold compatto con bordo.

Definiamo la *mappa di Gauss* come la mappa

$$g : \partial X \to \mathbf{S^{m-1}}$$

che assegna ad ogni $x \in \partial X$ il vettore normale in x che punta verso l'esterno del manifold.

Dimostriamo ora il seguente lemma ausiliario:

Lemma 2.1.8 (Hopf)**.** *Se $v : X \to \mathbb{R}^m$ è un campo vettoriale liscio con zeri isolati e se v è orientato verso l'esterno nei punti del bordo di X, allora la somma degli indici di v nei suoi zeri $\sum i$ è uguale al grado della mappa di Gauss e in particolare non dipende dalla scelta del campo v.*

Dimostrazione. Tagliando via dal manifold X una sferetta sufficientemente piccola attorno ad ogni zero del campo vettoriale v, otteniamo un nuovo manifold con bordo X'. La funzione $\bar{v}(x) = v(x)/||v(x)||$ mappa dunque questo nuovo manifold in $\mathbf{S^{m-1}}$ e perciò la somma dei gradi di $\bar{v}$ ristretti alle componenti del bordo è nulla. Ma $\bar{v}_{|\partial X}$ è omotopa alla mappa di Gauss g e la somma dei gradi sulle altre componenti del bordo (ossia sui bordi delle sferette che ho tolto in prossimità degli zeri e che quindi acquistano un'orientazione 'invertita') risulta uguale a $-\sum i$. Perciò $\deg(g) - \sum i = 0$ che implica l'enunciato. □

Consideriamo ora un campo vettoriale v su un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ e supponiamo che v sia una mappa $U \to \mathbb{R}^m$ tale che $dv_z : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sia definita.

Definizione 2.1.9. *Diciamo che il campo vettoriale v è* non degenere *in z se la trasformazione lineare dv_z è non singolare. Segue che z dev'essere uno zero isolato.*

Lemma 2.1.10. *L'indice di v in uno zero non degenere z è o $+1$ o -1 a seconda della positività del determinante di dv_z.*

Dimostrazione. Pensiamo a v come ad un diffeomorfismo da un intorno convesso U_0 di z in $\mathbb{R}^m$. Possiamo supporre che sia $z = 0$.

Se v mantiene l'orientazione abbiamo visto nel lemma 2.1.6 che $v_{|U_0}$ può venire deformato in maniera differenziabile nell'identità senza introdurre nuovi zeri. Perciò l'indice di v è certamente uguale a $+1$.

Se invece il campo vettoriale v non conserva l'orientazione, allora in maniera analoga può venire deformato in una riflessione. Dunque il suo indice sarà -1. □

Se adesso consideriamo più in generale uno zero di un campo vettoriale w su un manifold $M \subset \mathbb{R}^k$, possiamo pensare a w come ad una mappa da M in $\mathbb{R}^k$ tale che sia definito il suo differenziale $dw_z : TM_z \to \mathbb{R}^k$.

Lemma 2.1.11. *Il differenziale dw_z manda TM_z nel sottospazio $TM_z \subset \mathbb{R}^k$ e perciò può venire considerata come una trasformazione lineare da TM_z in se stesso. Se questa ha determinante $D \neq 0$, allora z è uno zero isolato di w con indice uguale a $+1$ o -1 a seconda che D sia positivo o negativo.*

Dimostrazione. Sia $h : U \to M$, dove $U \subset \mathbb{R}^m$, una parametrizzazione di un qualche intorno di z zero del campo w. Indichiamo con e_i l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^m$ e sia

$$t_i = dh_u(e_i) = \frac{\partial h}{\partial u_i}$$

di modo che i vettori $t_1, \ldots, t_m$ formino una base dello spazio tangente $TM_{h(u)}$. Ovviamente $dh_u : TU_u \to TM_{h(u)}$, dove $TU_u \subset \mathbb{R}^m$.

Il nostro scopo è ora quello di calcolare che cos'è l'immagine di $t_i = t_i(u)$ tramite la trasformazione lineare $dw_{h(u)} : TM_{h(u)} \to \mathbb{R}^k$. Osserviamo che

$$dw_{h(u)}(t_i) = dw_{h(u)} \circ dh_u(e_i) = d(w \circ h)_u(e_i) = \frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i}. \tag{2.1}$$

Perciò se $v = \sum_{j=1}^m v_j e_j$ è il campo vettoriale su U a cui corrisponde il campo vettoriale w su M, cioè per definizione $v = dh^{-1} \circ w \circ h$ di modo che

$$w(h(u)) = dh_u(v) = \sum v_j t_j$$

otteniamo

$$\frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_j}{\partial u_i} t_j + \sum_{j=1} v_j \frac{\partial t_j}{\partial u_i}. \tag{2.2}$$

Combinando quindi le 2.1 e 2.2 si ha

$$dw_{h(u)}(t_i) = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial u_i} t_j + \sum_j v_j \frac{\partial t_j}{\partial u_i}$$

che valutato nello zero $z = h(u)$ dà

$$dw_z(t_i) = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial u_j} t_j.$$

Dunque $dw_z : TM_z \to TM_z$ ed il determinante D di questa trasformazione lineare è uguale al determinante della matrice

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial u_j}\right).$$

Per il lemma 2.1.10 possiamo dunque concludere la prova. $\square$

Consideriamo ora un manifold M compatto e senza bordo $\subset \mathbb{R}^k$. Sia poi N_ϵ l'ϵ-intorno tubolare chiuso di M (ossia l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^k$ tali che $||x-y|| \leq \epsilon$ per qualche $y \in M$), per ϵ sufficientemente piccolo è possibile mostrare che N_ϵ è un manifold liscio con bordo.

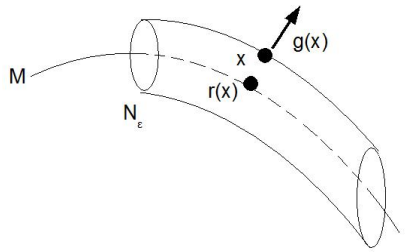
Teorema 2.1.12. *Per ogni campo vettoriale v su M con soli zeri non degeneri la somma degli indici $\sum i$ è uguale al grado della mappa di Gauss*

$$g : \partial N_\epsilon \to \mathbf{S^{k-1}}.$$

In particolare questa somma non dipende dalla scelta del campo vettoriale.

Dimostrazione. Sia $x \in N_\epsilon$, indichiamo con $r(x) \in M$ il punto più vicino ad x che stia su M, perciò se $x \in M \subset N_\epsilon$ in particolare $r(x) = x$.

Osserviamo che $r(x)-x$ è sempre ortogonale allo spazio tangente a M in $r(x)$, altrimenti $r(x)$ non sarebbe il punto più vicino di M. Se ϵ è sufficientemente piccolo, allora $r(x)$ è una mappa liscia e ben definita.



Consideriamo anche la funzione $\varphi(x) = ||x - r(x)||^2 \leq \epsilon^2$. Allora il gradiente di φ è dato da $\operatorname{grad}\varphi = 2(x - r(x))$. Perciò per ogni punto x sul bordo di $N_\epsilon = \varphi^{-1}(\epsilon^2)$ il versore normale a N_ϵ orientato verso l'esterno è dato da

$$g(x) = \frac{\operatorname{grad}\varphi}{||\operatorname{grad}\varphi||} = \frac{x - r(x)}{\epsilon}.$$

Estendiamo ora il campo vettoriale v su M ad un campo w su N_ϵ ponendo

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

Allora avremo che w punta verso l'esterno nei punti del bordo, poiché il prodotto interno $w(x) \cdot g(x)$ è uguale a $\epsilon > 0$. Osserviamo che w può annullarsi solo negli zeri di v in M; questo è chiaro poiché i due addendi (x-r(x)) e v(r(x)) sono ortogonali tra loro. Calcolando la derivata di w nello zero $z \in M$, osserviamo che

$$dw_z(h) = dv_z(h) \text{ per ogni } h \in TM_z$$

$$dw_z(h) = h \text{ per } h \in TM_z^\perp.$$

Infatti se ricordiamo che dv_z va dal tangente ad M in z, TM_z, in $\mathbb{R}^k$, mentre dw_z va dal tangente ad N_ϵ in z, $T(N_\epsilon)_z$, in $\mathbb{R}^k$ e che w altro non è che un'estensione di v, basta osservare che $h \in TM_z$ deve stare anche in $T(N_\epsilon)_z$ per dire che deve valere $dv_z(h) = dw_z(h)$. Se invece consideriamo un $h \in TM_z^\perp$, questo non sta più nel tangente al manifold M, dunque se considero $r(x+th)$ per un qualsiasi $t \in \mathbb{R}$ questo sarà uguale a $r(x)$ in quanto proiezione su M. Se calcoliamo dunque $dw_z(h)$ come derivata direzionale otteniamo

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{x + \epsilon h - r(x+\epsilon h) + v(r(x+\epsilon h)) - x + r(x) - v(r(x))}{\epsilon}$$

che, ricordando quanto detto precedentemente, ossia che $r(x+\epsilon h) = r(x)$, dà come risultato

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon h}{\epsilon} = h.$$

Perciò il determinante di dw_z coincide con il determinante di dv_z. Per capire meglio possiamo vedere i differenziali come applicazioni lineari e dunque rappresentati da matrici:

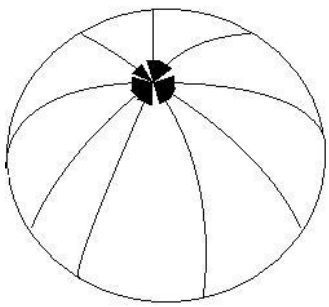
$$\mathbf{dw_z} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{dv_z} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbf{k-m}}}) \end{array}\right).$$

Perciò l'indice di w nello zero z è uguale all'indice di v in z.

Ora, grazie al lemma 2.1.8, possiamo concludere dicendo che la somma degli indici $\sum i$ dev'essere uguale al grado di g. □

Mostriamo ora come può essere applicato questo risultato.

Esempio 2.1.13 (Pettinabilità delle sfere)**.** *Su ogni sfera* $\mathbf{S^m}$ *esiste un campo vettoriale* v *tale che in ogni punto* $x \in \mathbf{S^m}$ *il vettore tangente* $v(x)$ *punti verso il 'Nord'. Osserviamo che può essere definito un campo vettoriale di questo genere ad esempio come* $v(x) = N - (N \cdot x)x$*, dove con* N *indichiamo un punto fissato su* $\mathbf{S^m}$*, che prendiamo come 'Nord'.*



Ovviamente se al Nord tutti i vettori sono convergenti, al Sud (punto antipodale al Nord sulla sfera) sono tutti uscenti e dunque l'indice del campo v *nel*

Sud sarà $+1$. *Mentre nel Nord, in base alla dimensione della sfera, l'indice di* v *sarà* $(-1)^m$.

Da queste considerazioni è possibile dedurre che la somma degli indici, che sappiamo essere un invariante topologico, sarà sempre uguale a 2 oppure a zero per una sfera, a seconda che la sua dimensione m *sia pari oppure dispari. Ciò mostra inoltre che ogni campo vettoriale su una sfera di dimensione pari deve avere sempre almeno uno zero.*

Osserviamo poi che per ogni manifold senza bordo, di dimensione m dispari l'invariante $\sum i$ è sempre nullo. Infatti se il campo scelto viene sostituito dal campo $-v$, allora ogni indice viene moltiplicato per $(-1)^m$, dunque, se m è dispari

$$\sum i = \sum (-1)^m i = -\sum i$$

il che implica

$$\sum i = 0.$$

Ricordiamo anche che se su un manifold M connesso $\sum i = 0$, esiste un teorema, dovuto a H. Hopf, che asserisce che esiste su M un campo vettoriale completamente privo di zeri.

Per giungere a conclusione del teorema 2.1.7 sono necessarie ancora alcune considerazioni.

Grazie alla teoria di Morse, che tratteremo nell'ultima sezione del capitolo, sappiamo che su ogni manifold M esiste un campo vettoriale tale che $\sum i = \chi(M)$. Come vedremo, un modo per costruire un campo vettoriale con queste caratteristiche è quello di considerare una funzione a valori reali il cui gradiente sia un campo vettoriale non degenere.

Per quanto visto finora, è sufficiente ai fini della dimostrazione che sia possibile costruire anche un solo campo di questo tipo, grazie all'invarianza di $\sum i$. Per maggiori dettagli rimandiamo a [2].

Resta da vedere cosa succede se il nostro campo vettoriale differenziabile v è degenere, ossia se ammette anche zeri degeneri.

Consideriamo allora un campo vettoriale v definito su un aperto U con un solo zero isolato z in U. Se definiamo una mappa

$$\lambda : U \to [0, 1]$$

tale che assuma il valore 1 in un piccolo intorno N_1 di z e il valore 0 al di fuori di un intorno N lievemente più grande e quindi contenente N_1. Perciò se y è un valore regolare per v sufficientemente piccolo, il campo vettoriale

$$v'(x) = v(x) - \lambda(x)y$$

è non degenere in N. In effetti, v' è chiaramente non degenere in N_1, dove vale $v'(x) = v(x) - y$ e dunque $dv' = dv$. Inoltre v' in questo caso si annulla

solamente nella preimmagine di y, ma y è un valore regolare per v, dunque v' non degenere in N_1.

Se poi y è sufficientemente piccolo, v' non ha proprio zeri in $N \setminus N_1$. Infatti se $x \in N \setminus N_1$ $\lambda(x) \neq 1, 0$ e dunque $v'(x) = 0$ se e solo se $v(x) = \lambda(x)y$ ossia se e solo se $v(x)$ è un multiplo del valore regolare y, perciò in particolare v' sarà privo di zeri degeneri.

Osserviamo anche che la somma degli indici negli zeri in N (che in questo caso ne contiene uno solo) può essere calcolata come il grado della mappa

$$\bar{v} : \partial N \to \mathbf{S^{m-1}}$$

e perciò non può cambiare con le alterazioni appena viste.

Nel caso allora di un campo vettoriale su un manifold compatto e senza bordo M è sufficiente applicare questo ragionamento localmente su ogni zero isolato, osservando che è possibile sostituire ogni campo vettoriale con zeri isolati con un campo vettoriale non degenere senza alterare l'intero $\sum i$.

Resterebbe solo da vedere cosa succede quando M è un manifold con bordo. Possiamo procedere come prima estendendo il campo vettoriale v su M ad un campo w sull'ϵ-intorno N_ϵ di M; chiaramente, dato che abbiamo imposto che v sia orientato verso l'esterno del manifold nei punti di ∂M, anche w sarà orientato verso l'esterno nei punti di ∂N_ϵ.

Il problema che si presenta in questo caso è che non sono più applicabili i risultati usati precedentemente, in quanto basati sulla differenziabilità di N_ϵ come manifold che non abbiamo più. Infatti questa volta attorno al bordo di M, le cose non funzionano più così bene non essendo più liscie. Abbiamo appunto che se M è un manifold con bordo, N_ϵ non è più un manifold differenziabile (ossia $\mathcal{C}^\infty$), ma solamente $\mathcal{C}^0$. Perciò l'estensione $w(x) = v(r(x)) + x - r(x)$ è un campo vettoriale solamente continuo e non necessariamente differenziabile sul bordo di M.

Diciamo tuttavia che è possibile provare la validità delle affermazioni fatte anche nel caso più generale di un manifold con bordo sia mostrando che le forti rischieste fatte in merito alla differenziabilità non sono necessarie sia con altri metodi che tuttavia non discutiamo approfonditamente in questo elaborato.

2.2 La Teoria di Morse

Come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema di Poincaré-Hopf il fatto che esista almeno un campo vettoriale con la proprietà $\sum i = \chi(M)$ è sufficiente per affermare la validità del teorema per qualsiasi campo vettoriale con le proprietà richieste nelle ipotesi. Questo per l'invarianza della somma $\sum i$ al cambiare del campo su cui viene calcolata.

La Teoria di Morse gioca un ruolo fondamentale perché ci consente di dimostrare l'esistenza di un campo con le proprietà richieste.

2.2.1 Definizioni e lemmi introduttivi

Definizione 2.2.1. *Siano V un piano fissato nello spazio e M un manifold ad esso tangente, allora data la funzione $f : M \to \mathbb{R}$ che associa a $p \in M$ la sua distanza dal piano V (funzione altezza sul piano V), definiamo*

$$M^a = \{x \in M : f(x) \leq a\}.$$

Sia ora g una mappa differenziabile tra manifold $g : M \to N$ tale che $g(p) = q$, con $p \in M$, $q \in N$, indichiamo la mappa lineare indotta tra gli spazi tangenti con $g_* : TM_p \to TN_q$.

Definizione 2.2.2. *Data una funzione differenziabile a valori reali f su un manifold M, un punto $p \in M$ è detto* punto critico *per f se la mappa indotta $f_* : TM_p \to T\mathbb{R}_{f(p)}$ è nulla (quindi non è invertibile).*

Se scegliamo una parametrizzazione locale di M e quindi un sistema di coordinate locali in un intorno U di p, allora f_* coincide con il differenziale df.

Definizione 2.2.3. *Un punto critico p è detto* non degenere *se e soltanto se la matrice*

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p))$$

è non singolare.

Se p è un punto critico per f è possibile definire un funzionale bilineare simmetrico su TM_p. Dati $v, w \in TM_p$ consideriamo le estensioni $\tilde{v}, \tilde{w}$ di v, w a campi vettoriali.

Definizione 2.2.4. *Poniamo $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$.*

Dunque $f_{**} : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$ è un funzionale bilineare simmetrico detto Hessiano *di f in p.*

Definizione 2.2.5. *Sia p un punto critico non degenere per f, definiamo indice di f in p la dimensione massima di un sottospazio di TM_p sul quale f_{**} è definita negativa.*

2.2.2 Le Diseguaglianze di Morse

Queste diseguaglianze giocano un ruolo fondamentale in quanto possono venire applicate direttamente ai numeri di Betti e alla caratteristica di Eulero di uno spazio, poiché applicazioni con una proprietà comune: la subadditività.

Definizione 2.2.6. *Sia f una funzione da una certa coppia di spazi negli interi. Diaciamo che f è* subadditiva *se per ogni torre $Z \subset Y \subset X$ si ha $f(X,Z) \leq f(X,Y) + f(Y,Z)$. Se vale l'uguaglianza, f si dice* additiva.

Si può mostrare che i numeri di Betti, definiti nel capitolo precedente, sono subadditivi, mentre la caratteristica di Eulero è additiva. Possiamo dedurlo osservando la porzione di sequenza esatta per (X,Y,Z):

$$\ldots H_j(Y,Z) \to H_j(X,Z) \to H_j(X,Y) \to \ldots.$$

Osserviamo che questa non è altro che la sequenza di Mayer-Vietoris della tripla esatta (X,Y,Z)(su tale argomento non ci siamo soffermati in quanto non necessario ai fini della comprensione del risultato principale, pur essendo una parte fondamentale della teoria dell'omologia).

Se chiamiamo il j-esimo numero di Betti della coppia (X,Y) $R_j(X,Y)$, allora il numero di Eulero della coppia sarà data da $\chi(X,Y) = \sum (-1)^j R_j(X,Y)$.

Lemma 2.2.7. *Se f è subadditiva e si ha $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$ allora $f(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} f(X_i, X_{i-1})$.*

Se invece f è additiva vale l'uguaglianza.

Siano M un manifold compatto e f una funzione differenziabile su M con punti critici isolati e non degeneri. Siano poi $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tali che M^{a_i} contenga esattamente i punti critici e $M^{a_k} = M$.

Allora consideriamo

$$H_j(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = H_j(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}),$$

dove $e^k \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^k : ||x|| \leq 1\}$ è la k-cella e λ_i è l'indice del punto critico che si aggiunge da $M^{a_{i-1}}$ a M^{a_i}. Per escissione (tagliando via M^{a_i}) il secondo membro è uguale a $H_j(e^{\lambda_i}, \dot{e}^{\lambda_i})$, dove ricordiamo che $\dot{e}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : ||x|| = 1\}$ è il bordo della k-cella e^k. Otteniamo perciò che

$$H_j(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } j \text{ è uguale all'indice del punto critico in } M^{a_i} \setminus M^{a_{i-1}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni coppia del tipo $(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})$ i due manifold che compaiono hanno insiemi dei punti critici che differiscono a meno di un solo elemento.

Se ricordiamo che R_j (i-esimo numero di Betti) non è altro che il rango di H_j su $\mathbb{Z}$, è chiaro che la somma degli $R_j(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})$ su i 'conti' il numero dei punti critici di indice j tra $\emptyset = M^{a_0}$ e $M^{a_k} = M$. Dunque se indichiamo con C_j il numero di punti critici con indice j possiamo scrivere

$$C_j = \sum_{i=1}^{k} R_j(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}).$$

Proviamo ad applicare il lemma 2.2.7 al caso in cui $f = R_j$ e $\emptyset = M^{a_0} \subset M^{a_1} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$, dove M è un manifold compatto e, data una funzione differenziabile g con punti critici isolati e non degeneri, M^{a_i} contiene i punti critici di g. Ovviamente $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k$.

Si ottiene che

$$R_j(M, \emptyset) \stackrel{def}{=} R_j(M) \leq \sum_{i=1}^{k} R_j(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_j.$$

Applicando il lemma al caso $f = \chi$ e sulla stessa catena di incusioni $\emptyset = M^{a_0} \subset M^{a_1} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$ invece, si ha

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{k} \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 - \cdots \pm C_n.$$

Da cui le seguenti.

Diseguaglianze di Morse deboli 2.2.8. *Se C_j indica il numero di punti critici di indice j sul manifold compatto M allora*

$$R_j(M) \leq C_j \ \ e \ \sum_j (-1)^j R_j(M) = \sum_j (-1)^j C_j.$$

Se ora consideriamo la funzione subadditiva S_j dove $S_j(X,Y) = R_j(X,Y) - R_{j-1}(X,Y) + R_{j-2}(X,Y) - \cdots \pm R_0(X,Y)$ e la applichiamo alla catena $\emptyset = M^{a_0} \subset M^{a_1} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$ otteniamo le seguenti.

Diseguaglianze di Morse 2.2.9.

$$S_j(M) \leq \sum_{i=1}^{k} S_j(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_j - C_{j-1} + C_{j-2} - \cdots \pm C_0$$

oppure

$$R_j(M) - R_{j-1}(M) + R_{j-2}(M) - \cdots \pm R_0(M) \leq C_j - C_{j-1} + C_{j-2} - \cdots \pm C_0.$$

2.2.3 Applicazione ai manifold euclidei

Il problema che si pone ora è quello di mostrare che su un manifold, una funzione che ammette solo punti critici non degeneri esiste sempre.

Si può mostrare che per quasi ogni $p \in \mathbb{R}^n$ e per ogni manifold M embedded in $\mathbb{R}^n$ la funzione $L_p : M \to \mathbb{R}$ che a $q \in M$ associa $||p - q||^2$ possiede solo punti critici non degeneri.

In questa sezione non discuteremo l'intera dimostrazione di questo fatto, ricordiamo tuttavia per importanza che sono necessari i concetti di *fibrato normale* di un manifold ed il *lemma di Sard* per completare la prova.

Si ottiene il seguente teorema.

Teorema 2.2.10. *Per quasi ogni $p \in \mathbb{R}^n$ la funzione $L_p : M \to \mathbb{R}$ non ha punti critici degeneri.*

Grazie ad un risultato dovuto a Whitney, il quale asserisce che un n-manifold M ammette sempre un embedding differenziabile come sottoinsieme chiuso in $\mathbb{R}^{2n+1}$, otteniamo un corollario importante.

Corollario 2.2.11. *Su ogni manifold M esiste una funzione differenziabile senza punti critici degeneri per la quale M^a è compatto.*

L'applicazione che ci interessa di questo risultato è la seguente.

Su un manifold compatto M esiste un campo vettoriale v tale che la somma degli indici dei punti critici di v eguagli $\chi(M)$, la caratteristica di Eulero di M.

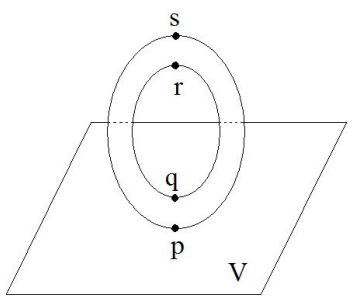
Infatti per ogni f funzione differenziabile su M abbiamo che

$$\chi(M) = \sum_j (-1)^j C_j$$

dove C_j è il numero di punti critici con indice j. Ma $(-1)^j$ è l'indice del campo vettoriale $\operatorname{grad} f$ in un punto in cui f ha indice j. Quindi la somma $\sum_j (-1)^j C_j$ costituisce la somma degli indici di $\operatorname{grad} f$ nei punti singolari di f, ossia negli zeri di $\operatorname{grad} f$, in cui f ha indice j. Abbiamo così ottenuto su M un campo vettoriale $v = \operatorname{grad} f$ che soddisfa la proprietà $\chi(M) = \sum i$, dove i è l'indice di v in un suo zero.

Concludiamo questa sezione sulla Teoria di Morse cercando di mostrarne il significato in termini pratici. Proponiamo a questo scopo un esempio notevole.

Esempio 2.2.12. *Consideriamo un toro M (2-manifold compatto) tangente ad un piano V come mostrato in figura.*



Sia $f : M \to \mathbb{R}$ la funzione che ad ogni punto del toro M associa la sua distanza dal piano V. Poniamo $M^a = \{x \in M : f(x) < a\}$. Avremo quindi che

- *se $a < 0$, $M^a = \emptyset$;*
- *se $f(p) < a < f(q)$, M^a è omeomorfo ad un disco $\mathbf{D^2}$;*
- *se $f(q) < a < f(r)$, M^a è omeomorfo ad un cilindro;*

- *se* $f(r) < a < f(s)$, M^a *è omeomorfo ad un toro bucato;*
- *se* $a > f(s)$, $M^a = M$.

I punti p, q, r, s *in cui cambia la classe di equivalenza omotopica di* M^a *sono i punti critici della nostra funzione* f.

Osserviamo che il passaggio da un M^a *ad un altro in termini di classi di omotopia è segnato dall'incollamento di k-celle. Ad ogni passo* k *è uguale all'indice di* f *nel punto critico che si aggiunge ad* M^a.

Riassumendo possiamo identificare un manifold M con la somma di tante celle quanti sono i punti critici di una mappa differenziabile g su M e che hanno dimensione uguale all'indice di g su ciascuno di questi punti.

Capitolo 3

La caratteristica di Eulero per le superfici compatte

In questo capitolo introdurremo una definizione di numero di Eulero basata non più sull'omologia, ma su un procedimento applicabile esclusivamente ai 2-manifold compatti, che è quello della triangolazione.

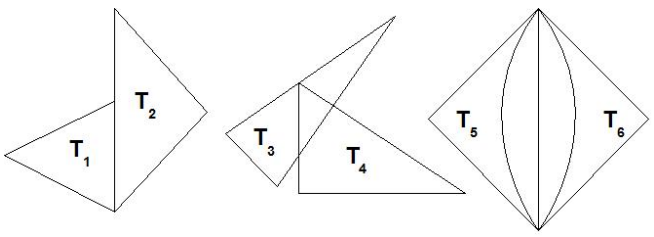
Questi manifold sono, per così dire, speciali non solo per questa proprietà di essere triangolabili, ma soprattutto perché è solo per loro che esiste un teorema di classificazione generale.

3.1 Triangolazione delle superfici compatte

Per dimostrare il teorema di classificazione delle superfici compatte, come per definire in questa sezione la caratteristica di Eulero, è necessario introdurre il metodo di triangolazione.

Possiamo facilmente immaginare cosa significhi 'triangolare una superficie', pensando ad una superficie suddivisa in regioni triangolari che 'si attaccano bene' tra loro.

Mostriamo nel disegno seguente alcuni casi che non possono presentarsi in una triangolazione.



Definizione 3.1.1. *Una* triangolazione *di una superficie compatta S consiste di una famiglia finita di sottoinsiemi chiusi $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ che ricopre S e di una famiglia di omeomorfismi $\phi_i : T_i' \to T_i$ per $i = 1, \ldots, n$, dove ogni T_i' è un triangolo nel piano $\mathbb{R}^2$ (ossia un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ delimitato da tre rette distinte). I sottoinsiemi T_i vengono chiamati 'triangoli', mentre i sottoinsiemi di T_i che sono le immagini dei vertici e dei lati del triangolo T_i' tramite ϕ_i vengono chiamati 'vertici' e 'lati' rispettivamente.*

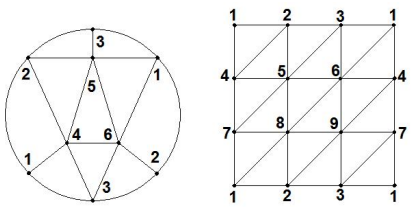
Viene inoltre richiesto che per ogni coppia di triangoli T_i e T_j della triangolazione si verifichi almeno una e una sola delle seguenti situazioni:

1. *T_i e T_j sono disgiunti;*
2. *T_i e T_j hanno un intero lato in comune;*
3. *T_i e T_j hanno un vertice in comune.*

Dalla definizione data è quindi plausibile pensare che ogni superficie compatta ammetta una triangolazione (per la dimostrazione di questo fatto è necessaria una versione forte del teorema della curva di Jordan che non approfondiremo), ma non solamente una.

Vediamo qui di seguito la triangolazione di due ben note superfici.

Esempio 3.1.2. *Una triangolazione del piano proiettivo e di un toro.*



Osserviamo che ogni triangolazione di una superficie compatta deve soddisfare due condizioni importanti:

1. Ogni lato è un lato per due triangoli;
2. Se v è un vertice della triangolazione allora è sempre possibile organizzare tutti i triangoli che hanno v come vertice in ordine ciclico, quindi numerandoli $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n = T_0$ di modo che per ogni i T_i e T_{i+1} abbiano un intero lato in comune.

3.2 La caratteristica di Eulero di una superficie compatta

Anche se non è stato qui dimostrato, il teorema di classificazione delle superfici compatte afferma che qualsiasi superficie compatta è omeomorfa ad una sfera, o ad una somma connessa di tori, o ad una somma connessa di piani proiettivi.

Una domanda sorge a questo punto spontanea: chi può garantirci che queste tre categorie di oggetti siano distinte? O meglio, non è possibile che per $m \neq n$ la somma di m tori sia omeomorfa alla somma di n tori?

Proprio per dimostrare che questo non può succedere introduciamo un invariante numerico chiamato caratteristica di Eulero. Definiamolo prima di tutto per una superficie triangolata.

Definizione 3.2.1. *Sia M una superficie compatta con una triangolazione $\{T_1, \ldots, T_n\}$ e siano*

$$v = \textit{numero totale dei vertici di } M$$

$$e = \textit{numero totale dei lati di } M$$

$$t = \textit{numero totale di triangoli (in questo caso } t = n\textit{)}$$

Allora l'intero

$$\chi(M) = v - e + t$$

è chiamato caratteristica di Eulero *di M.*

Osservando qualche esempio di triangolazione come quelli nell'esempio 3.1.2 è possibile verificare che le caratteristiche di Eulero della sfera, del toro e del piano proiettivo sono, rispettivamente, 2, 0 e 1.

Inoltre, in questi casi più semplici, è possibile osservare che questi interi sono indipendenti dal numero di linee di divisione vericali e orizzontali per la sfera e il toro e dal numero delle linee radiali o concentriche per il piano proiettivo.

Questa considerazione ci suggerisce che $\chi(M)$ dipenda solamente da M e non dalla triangolazione scelta, proponiamo qui di seguito una dimostrazione di questo fatto.

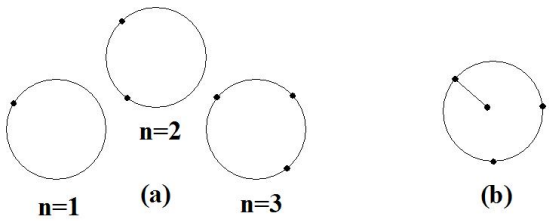


Figura 3.1:

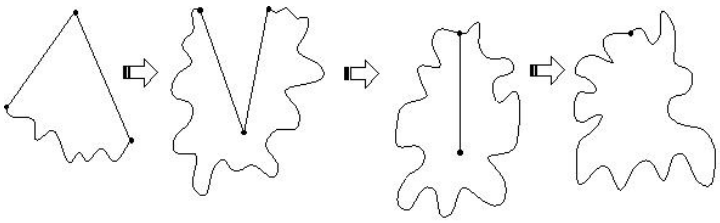
Consideriamo una suddivisione di M in poligoni arbitrari con un numero qualsiasi n di lati e vertici, $n \geq 1$, come in figura (a), osserviamo che per un lato non è necessario suddividere una regione (b).

Ad ogni modo l'interno di ogni regione poligonale dev'essere necessariamente omeomorfo ad un disco aperto ed ogni lato dev'essere omeomorfo ad un intervallo aperto della retta reale, una volta rimossi i due vertici. Alla fine della sistemazione di questo 'puzzle' di poligoni, il numero dei vertici, lati e regioni poligonali ottenuti sarà finito. Definiamo allora la caratteristica di Eulero di una tale suddivisione di una superficie compatta M come:

$$\chi(M) = \#vertici - \#lati + \#regioni.$$

Risulta ora facile da vedere che la caratteristica di Eulero è invariante attraverso i seguenti processi:

- Suddivisione di un lato per aggiunta di un vertice in un suo punto interno, oppure eliminazione di due lati se sono gli unici a convergere in un determinato vertice.



- Suddivisione di un poligono con n lati, $n \geq 1$, per collegamento di due dei suoi vertici con un nuovo lato, oppure unione di due regioni per eliminazione di un lato preesistente.

- Introduzione di un nuovo lato e vertice interno ad una regione come in figura 3.1(b), oppure eliminazione di una tale coppia di lato e vertice.

Per completare la dimostrazione dell'invarianza della caratteristica di Eulero è necessario mostrare che è sempre possibile passare da una triangolazione ad un'altra con un numero finito di passi del tipo di quelli elencati precedentemente.

Supponiamo quindi di avere due triangolazioni $\mathscr{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ e $\mathscr{T}' = \{T'_1, \ldots, T'_n\}$. Se l'intersezione di un qualsiasi lato della triangolazione $\mathscr{T}$ con un altro lato qualsiasi della triangolazione $\mathscr{T}'$ consiste di un numero finito di punti e di un numero finito di intervalli chiusi, allora è facile vedere che possiamo passare dalla triangolazione $\mathscr{T}$ alla $\mathscr{T}'$ in un numero finito di tali passi. Se però un lato di $\mathscr{T}$ interseca un lato di $\mathscr{T}'$ in un numero infinito di punti è impossibile passare da $\mathscr{T}$ a $\mathscr{T}'$ in un numero finito di passi con gli strumenti usati finora. L'unico modo di risolvere questo tipo di problema (e può essere

provato rigorosamente anche se qui non ci soffermeremo) è spostare leggermente uno dei lati in questione.

Vediamo ora come la caratteristica di Eulero definita in questa sezione con le triangolazioni coincida con la definizione omologica nel caso speciale dei 2-manifold compatti.

Ricordiamo che la caratteristica di Eulero omologica di un manifold M è definita come $\chi(M) = \sum_q (-1)^q \beta_q$, dove β_q è il rango di $H_q(M)$. Nel caso di un 2-manifold questa si riduce a $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$, dove β_q è, come abbiamo visto, il numero minimo di generatori del gruppo quoziente $H_q(M)/H_q(M)_{tor}$. Ora, $H_q(M)$ è il quoziente tra il modulo dei cicli e quello dei bordi q-dimensionali tra i q-simplessi singolari; basta quindi osservare che i 2-simplessi singolari mappano in M i triangoli, gli 1-simplessi i segmenti (quindi i 'lati') e gli 0-simplessi i punti.

Da ciò risulta facilmente comprensibile come le due definizioni, pur essendo radicalmente differenti, possano in queste speciali circostanze coincidere.

Dopo aver visto che la caratteristica di Eulero è un'invariante numerico e poiché sappiamo che tutte le superfici compatte possono essere classificate in tre categorie fondamentali, non ci resta che dare qualche risultato che ci permetta di calcolare qualcuno di questi interi.

Proposizione 3.2.2. *Siano S_1 e S_2 due superfici compatte. Le caratteristiche di Eulero di S_1, S_2 e della loro somma connessa sono legate dalla formula:*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi S_2 - 2.$$

Dimostrazione. Supponiamo che S_1 e S_2 siano superfici triangolate, costruiamo la loro somma connessa rimuovendo da ognuna di esse l'interno di un triangolo e quindi identificando lati e vertici dei bordi dei triangoli rimossi. La formula allora segue semplicemente contando vertici, lati e triangoli prima e dopo la costruzione. Infatti il numero di lati e vertici resta lo stesso, mentre mancano all'appello due triangoli. □

Grazie a questo risultato e per induzione è possibile ottenere il valore della caratteristica di Eulero per tutte le superfici compatte possibili.

Superficie	χ
sfera	2
somma connessa di n tori	$2-2n$
somma connessa di n piani proiettivi	$2-n$
somma connessa di un piano proiettivo e di n tori	$1-2n$
somma connessa di una bottiglia di Klein e di n tori	$-2n$

Teorema 3.2.3. *Siano S_1 e S_2 due superfici compatte, allora S_1 e S_2 sono omeomorfe se e solo se le loro caratteristiche di Eulero sono uguali e se sono entrambe orientabili o non orientabili.*

Questo teorema, di cui non diamo la dimostrazione, riduce la classificazione delle superfici compatte alla determinazione della loro orientabilità e delle loro caratteristiche di Eulero. Ricordiamo che una clasificazione così completa di ogni classe di spazi topologici è davvero rara, infatti non è stato provato alcun teorema simile per i 3-manifold compatti e sappiamo che per i 4-manifold non può proprio esistere.

Definizione 3.2.4. *Una superficie che sia data da una somma connessa di n tori o di n piani proiettivi è detta di* genere n*, mentre una sfera ha genere* 0.

È possibile osservare che vale la seguente relazione che collega il genere di una superficie alla sua caratteristica di Eulero:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi) & \text{se la superficie è orientabile} \\ 2-\chi & \text{se la superficie non è orientabile} \end{cases}$$

Concludiamo ricordando che nel caso di superfici con bordo è possibile condurre un ragionamento analogo.

Bibliografia

[1] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[2] John W. Milnor. *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963

[3] Marvin J. Greenberg, John R. Harper. *Algebraic Topology. A First Course.* Addison-Wesley, 1981.

[4] Serge Lang. *Algebra.* Springer, GTM, 2002.

[5] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[6] Heinz Hopf. *Differential Geometry in the Large.* Springer, Lecture Notes in Mathematics, 1989.

[7] Morris W. Hirsch. *Differential Topology.* Springer, GTM, 1976.

[8] William S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction* Springer, GTM, 1967.