Interazione campo e.m. materia

Equazioni di Maxwell

1 $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ → Equazione di Maxwell-Faraday: un campo elettrico variabile genera un campo magnetico

2 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → T. di Gauss, sorgenti del campo el.

3 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0$ → non esistenza di monopoli magnetici

4 $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → Equazione di Maxwell-Ampere: i campi magnetici possono essere generati in 2 modi: correnti elettriche (legge di Ampere) e campi elettrici variabili (Maxwell).

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}$$

invarianza di Gauge

$$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi \to \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

gauge di Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

in assenza di cariche e correnti

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = 0 \longrightarrow \left(\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0\right)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\cancel{\vec{\nabla} \vec{A}}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

eq. d'onda $\quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$

onda piana $\quad \vec{A}(\vec{r},\omega,t) = \hat{\varepsilon}(\omega) A_0(\omega)\left[\exp\left(i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_\omega\right)\right) + c.\ c.\right]$

Hamiltoniana di un atomo di idrogeno in un campo e.m.

$$H = H_0 + H'(t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}}$$

dimostrazione:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \rightarrow \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2$$

F. di Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = q\left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)\right]$$

$$\vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \cancel{\vec{\nabla}}\right)\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)$$

gauge di Coulomb

$$\vec{F} = q\left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)\right]$$

$$\vec{F} = q\left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)\right]$$

equazioni del moto:

$$m\ddot{q}_i = -q\dot{A}_i - q\frac{\partial \phi}{\partial q_i} + q\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\overbrace{m\ddot{q}_i + q\dot{A}_i} + \overbrace{q\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - q\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right)} = 0$$

lagrangiana del sistema: $L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$

$$\overbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)} - \overbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}} = 0$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}}$$

def. dei momenti generalizzati: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} \rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)$

$$H \equiv \sum p_i\dot{q}_i - L = mv^2 + q\vec{A}\cdot\vec{v} - L = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi$$

effetto del campo e.m.

$$H = H_0 + H'(t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$$

sistema quantistico

$$\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 = -\hbar^2\nabla^2 + \cancel{q^2A^2} - \frac{\hbar}{i}q(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla})$$

I approssimazione: *campi deboli* ⇒
A^2 si trascura rispetto a A
(si tratta l'assorbimento o l'emissione di un fotone alla volta)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\psi = \cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}\psi + \vec{A}(\vec{\nabla}\psi) = \vec{A}(\vec{\nabla}\psi)$$

Gauge di Coulomb

gauge di Coulomb +campi deboli

$$\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 \approx -\hbar^2\nabla^2 - \frac{2\hbar}{i}q\vec{A}\cdot\vec{\nabla}$$

Effetto del campo e.m.

$$H'(t) = -\frac{\hbar}{mi}q\vec{A}(t)\cdot\vec{\nabla}$$

Teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$ Eq. di Schrödinger dip. dal tempo

$$H = H_0 + \lambda H'(t)$$ λ parametro che descrive l'entita' della perturbazione

$$H_o\psi_k(\vec{r}) = E_k\psi_k(\vec{r})$$ Eq. di Schrödinger stazionaria

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_k c_k(t)\exp\left(-i\frac{E_k t}{\hbar}\right)\psi_k(\vec{r})$$

autofunzioni dell'hamiltoniana H_0, basi

$$i\hbar\sum_k \exp\left(-i\frac{E_k t}{\hbar}\right)\left(\psi_k(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}c_k(t) - i\frac{E_k}{\hbar}c_k(t)\psi_k(\vec{r})\right) =$$

$$= \sum_h \exp\left(-i\frac{E_h t}{\hbar}\right)\left(E_h\psi_h(\vec{r})c_h(t) + \lambda H'(t)c_h(t)\psi_h(\vec{r})\right)$$

applichiamo l'operatore: $\langle\psi_l| = \int d^3r\psi_l{}^*(\vec{r})$

$$i\hbar\exp\left(-i\frac{E_l t}{\hbar}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}c_l(t)\right) = \sum_h \exp\left(-i\frac{E_h t}{\hbar}\right)\left(\lambda\langle\psi_l|H'(t)|\psi_h\rangle c_h(t)\right)$$

il coefficiente $c_h(t)$ dipende, con continuità, dalla perturbazione e può essere a sua volta sviluppato in serie rispetto alla perturbazione:

$$c_l(t) = \sum_r c_l^{(r)}(t)\lambda^r \qquad c_l^{(0)}(t) = \text{cost.} = \delta_{l0}$$

In assenza di perturbazione il sistema sarà allo stato fondamentale = 0

II approssimazione: ci si ferma al *primo ordine* dello sviluppo in serie, si considerano i termini con uguale esponente di λ

$$i\hbar\exp\left(-i\frac{E_l t}{\hbar}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}c_l^{(1)}(t)\right) = \sum_h \exp\left(-i\frac{E_h t}{\hbar}\right)\left(\langle\psi_l|H'(t)|\psi_h\rangle\delta_{h0}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}c_l^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\exp\left(-i\frac{(E_0 - E_l)t}{\hbar}\right)\left(\langle\psi_l|H'(t)|\psi_0\rangle\right)$$

ricordando che: $H'(t) = -\frac{\hbar}{mi} q\vec{A}(t)\cdot\vec{\nabla}$ $\omega_{l0} \equiv \frac{E_l - E_0}{\hbar}$

$$c_l^{(1)}(t) = \frac{q}{m}\int_0^t dt' \exp(i\omega_{l0}t')\left(\langle\psi_l|\vec{A}(t')\cdot\vec{\nabla}|\psi_0\rangle\right)$$

ricordando che (onda monocromatica):

$$\vec{A}(\vec{r},\omega,t) = \hat{\varepsilon}(\omega)A_0(\omega)\left[\exp\left(i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_\omega\right)\right) + c.\ c.\right]$$

per un onda non monocromatica:

$$c_l^{(1)}(t) = \frac{q}{m}\int_{\Delta\omega} d\omega A_0(\omega)\int_0^t dt' \exp\left(i(\omega_{l0} - \omega)t'\right)e^{i\delta_\omega}\left(\langle\psi_l|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\varepsilon}(\omega)\cdot\vec{\nabla}|\psi_0\rangle\right) + c.\ c.$$

l'integrale rispetto al tempo: $\int_0^t dt' \exp\left(i(\omega_{l0} - \omega)t'\right)$

da una δ di Dirac:

III approssimazione: il tempo di interazione *t* è molto maggiore rispetto al tempo di transizione $t >> \frac{2\pi}{\omega} \cong 10^{-15}\,\mathrm{sec}$

Ricordando che una espressione per la δ di Dirac è:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k} dt' e^{iht'} = 2\pi\delta(h)\,*$$

Si ha che i 2 integrali (... +c.c.) rispetto al tempo per t >>1/$\Delta\omega$ selezionano 2 fenomeni:

ASSORBIMENTO: $\omega_{l0} = \omega$

EMISSIONE: $\omega_{l0} = -\omega$

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_k c_k(t)\exp\left(-i\frac{E_k t}{\hbar}\right)\psi_k(\vec{r})$$

La probabilità di transizione è legata al modulo quadro del coefficiente *c*

Dim. $*\int dh f(h)\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k} dt' e^{iht'} = \lim_{k\to\infty}\int dh f(h)\frac{2\sin(hk)}{h} = \lim_{k\to\infty}\int\frac{dz}{k}f\left(\frac{z}{k}\right)k\frac{2\sin(z)}{z} = f(0)2\pi$

$$\left|c_l^{(1)}(t)\right|^2 \propto \left|\int_0^t dt \exp\left(i(\omega_{l0}-\omega)t\right)\right|^2 = 2\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha^2}d\alpha = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha t/2}{\alpha^2}d\alpha = \pi t$$

Il modulo quadro di $c_l(t)$ ovvero la probabilità di transizione da *0* a *l* diviene dunque:

$$\left|c_l^{(1)}(t)\right|^2 = \left(\frac{q}{m}\right)^2 2\pi t\left|A_0(\omega_{l0})\right|^2\left|\left(\left\langle\psi_l\right|e^{i\vec{k}\vec{r}}\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\cdot\vec{\nabla}\left|\psi_0\right\rangle\right)\right|^2$$

La velocità di transizione da *0* a *l* è definita come:

$$W_{l0} = \frac{d\left|c_l^{(1)}(t)\right|^2}{dt} = \left(\frac{q}{m}\right)^2 2\pi\left|A_0(\omega_{l0})\right|^2\left|M_{l0}(\omega_{l0})\right|^2$$

$$M_{l0}(\omega_{l0}) \equiv \left(\left\langle\psi_l\right|e^{i\vec{k}\vec{r}}\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\cdot\vec{\nabla}\left|\psi_0\right\rangle\right)$$

Conviene esprimere la velocità di transizione in termini di intensità dell'onda e.m.:

La *densità di energia* ρ di un onda e. m. è:

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = 4\varepsilon_0\omega^2 A_0^2(\omega)\sin^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\omega\right)$$

Considerando la media su un periodo $2\pi/\omega$: $\qquad \rho(\omega) = 2\varepsilon_0\omega^2 A_0^2(\omega)$

La densità di energia di un fascio di fotoni di frequenza ω è: $\qquad N(\omega)\frac{\hbar\omega}{V}$

e dunque abbiamo: $\qquad A_0^2(\omega) = N(\omega)\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega}$

Allo stesso modo il vettore di Poynting $\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right)$

definisce l'entità del flusso di energia attraverso un'unità di superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. La media di tale quantità su un periodo definisce l'intensità di energia trasportata dalla radiazione:

$$I(\omega) = 2\varepsilon_0 \omega^2 A_0^2(\omega) c = c\rho(\omega)$$

$$\frac{I(\omega)}{2\varepsilon_0 \omega^2 c} = A_0^2(\omega)$$

E dunque la velocità di transizione è direttamente proporzionale intensità dell'onda e.m.:

$$W_{l0} = \frac{4\pi^2}{m^2 c} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{I(\omega_{l0})}{\omega_{l0}{}^2} \left|M_{l0}(\omega_{l0})\right|^2$$

IV approssimazione: approssimazione di dipolo

$$M_{l0}(\omega_{l0}) = \left(\langle \psi_l | e^{i\vec{k}\vec{r}} \hat{\varepsilon}(\omega_{l0}) \cdot \vec{\nabla} | \psi_0 \rangle\right)$$

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\vec{r} + \ldots \longrightarrow \approx 1$$

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6.28}{600 \quad nm} \approx 10^{-2}\ \text{Å}^{-1}$$ luce visibile $\quad \left|\vec{r}\right| \approx 1\ \text{Å}$ dim. atomiche

$$M_{l0}(\omega_{l0}) = \hat{\varepsilon}(\omega_{l0}) \cdot \left(\langle \psi_l | \vec{\nabla} | \psi_0 \rangle\right) = \frac{i}{\hbar} \hat{\varepsilon}(\omega_{l0}) \left(\langle \psi_l | \vec{p} | \psi_0 \rangle\right) = \frac{im}{\hbar} \hat{\varepsilon}(\omega_{l0}) \left(\langle \psi_l | \dot{\vec{r}} | \psi_0 \rangle\right)$$

Applicando l'equazione del moto (nella rappresentazione di Heisenberg) alla variabile dinamica *r* si ha:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}, H_0\right]$$

$$M_{l0} = \frac{m}{\hbar^2}\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\left(\langle\psi_l|\vec{r}H_0 - H_0\vec{r}|\psi_0\rangle\right) = (E_0 - E_l)\frac{m}{\hbar^2}\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\left(\langle\psi_l|\vec{r}|\psi_0\rangle\right) =$$

$$= -\frac{m\omega_{l0}}{\hbar}\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\langle\psi_l|\vec{r}|\psi_0\rangle$$

La velocità di transizione da *0* a *l* è duque:

$$W_{l0} = \frac{d\left|c_l^{(1)}(t)\right|^2}{dt} = \frac{4\pi^2}{c}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I(\omega_{l0})}{\hbar^2}\left|\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\cdot\vec{r}_{l0}\right|^2$$

Introducendo l'operatore momento di dipolo elettrico:

$$\vec{D}_{l0} = -q\vec{r}_{l0}$$

$$W_{l0} = \frac{4\pi^2}{c\hbar^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}I(\omega_{l0})\left|\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\cdot\vec{D}_{l0}\right|^2$$

Quindi la velocità di transizione dipende dall'intensità dell'onda incidente e dal prodotto scalare tra il momento di dipolo (D) e il vettore di polarizzazione dell'onda e. m. (ε)

$$W_{l0} \propto I(\omega_{l0})\left|\hat{\varepsilon}(\omega_{l0})\cdot\vec{D}_{l0}\right|^2$$

Riassunto:

- Eq. di Maxwell; gauge di Coulomb
- Lagrangiana di una part. carica in un campo e.m.

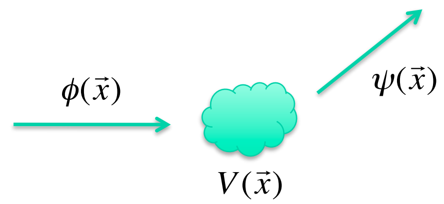
(Forza di Lorenz e int. elettrostatiche)

- Campi deboli (trascuriamo A^2). *I approssimazione*
- Teoria delle perturbazioni dip. dal tempo al I ordine. *II approssimazione*
- *III approssimazione*: il tempo di interazione t >> del tempo di transizione
- Intensità di un fascio di fotoni
- Approssimazione di dipolo. *IV approssimazione*

Eq. di Schrödinger indipendente dal tempo

Un fascio di particelle φ interagisce con un sistema qualsiasi (potenziale di interazione V)

$$\left(-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}+V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x})=E\psi(\vec{x})$$



Notazione di Dirac:

$$(H_0+V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \qquad V|\psi\rangle=(E-H_0)|\psi\rangle$$

Soluzione formale:

$$|\psi\rangle=(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}V|\psi\rangle+|\phi\rangle$$

In assenza di potenziale V autofunzioni $|\phi\rangle$

$$(E-H_0)|\phi\rangle=0$$

Rappresentazione in una base *delle posizioni* x:

$$\psi(\vec{x})=\langle\vec{x}|\psi\rangle=\langle\vec{x}|(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}V|\psi\rangle+\langle\vec{x}|\phi\rangle$$

$$\psi(\vec{x})=\int d\vec{x}'\langle\vec{x}|(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|V|\psi\rangle+\langle\vec{x}|\phi\rangle$$

Funzione di Green: $G(\vec{x},\vec{x}')\equiv\langle\vec{x}|(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}|\vec{x}'\rangle$

Rappresentazione della funzione di Green in una base dei *momenti*:

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\langle\vec{x}|(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}|\vec{x}'\rangle=\int d\vec{p}d\vec{p}'\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}|\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\vec{x}'\rangle$$

$$\langle\vec{p}|(E-H_0+i\varepsilon)^{-1}|\vec{p}'\rangle=\delta(\vec{p}-\vec{p}')\frac{1}{E-\frac{p^2}{2m}+i\varepsilon}$$

particella libera = onda piana

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle=\frac{e^{i\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

energia cinetica

$$G(\vec{x},\vec{x}')=G(\vec{r})=\int d\vec{p}\,\frac{1}{E-\frac{p^2}{2m}+i\varepsilon}\,\frac{e^{i\frac{\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^3} \qquad \vec{x}-\vec{x}'\equiv\vec{r}$$

integro in coord. polari:

$$G(\vec{r}) = \int dp p^2 \int d\varphi \int d\cos\vartheta \frac{1}{E - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon} \frac{e^{i\frac{pr\cos\vartheta}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= \frac{2\pi\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{E - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon} \frac{e^{i\frac{pr}{\hbar}} - e^{-i\frac{pr}{\hbar}}}{ipr} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp p \frac{-2m}{p^2 - 2mE - i\varepsilon} \frac{e^{i\frac{pr}{\hbar}}}{ir}$$

$$p^2 - 2mE - i\varepsilon = \left(p - \sqrt{2mE} - i\varepsilon\right)\left(p + \sqrt{2mE} + i\varepsilon\right)$$

integro (teorema dei residui)

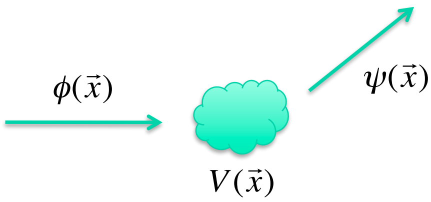
$$p = \sqrt{2mE} = k\hbar$$

$$G(\vec{r}) = \frac{-2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \propto \frac{e^{ikr}}{r}$$

Onda sferica

$$\psi(\vec{x}) = \int d\vec{x}' G(\vec{x},\vec{x}') V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') + \phi(\vec{x}) =$$

$$= \frac{-2m}{\hbar^2} \int d\vec{x}' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') + \phi(\vec{x}) =$$



Il potenziale $V(x')$ esiste in una parte dello spazio limitata: $x >> x'$

I approssimazione: fenomeni locali (località dell'interazione)

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \approx \left(x^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'\right)^{1/2} \approx x - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x} = r - \vec{x}'\cdot\hat{x} \longrightarrow k|\vec{x}-\vec{x}'| = kr - \vec{x}'\cdot k\hat{x} = kr - \vec{x}'\cdot\vec{k}'$$

$$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{e^{ikr} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}}{r}$$

$$\psi(\vec{x}) = \frac{-2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d\vec{x}' e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') + \phi(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(\frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k},\vec{k}') + e^{i\vec{k}\vec{x}} \right)$$

II approssimazione: approssimazione di Born

$$|\psi\rangle = \left(E - H_0 + i\varepsilon\right)^{-1} V|\psi\rangle + |\phi\rangle \rightarrow \left(E - H_0 + i\varepsilon\right)^{-1} V|\phi\rangle + |\phi\rangle + O(V^2)$$

$$\psi(\vec{x}) = \frac{-2m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int d\vec{x}' e^{i\vec{k}'\vec{x}'} V(\vec{x}')\phi(\vec{x}') + \phi(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\left(e^{i\vec{k}\vec{x}} + \frac{-2m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int d\vec{x}' e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} V(\vec{x}') e^{i\vec{k}\vec{x}'}\right)$$

$$\downarrow$$

$$f(\vec{k},\vec{k}')$$

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{q}$$

funzione d'onda perturbata dall'interazione con V

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\left(e^{i\vec{k}\vec{x}} + \frac{-2m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int d\vec{x}' e^{i\vec{q}\vec{x}'} V(\vec{x}')\right)$$

Sezione d'urto

La probabilità di trovare una particella in un volume V è:

$$\int_V d\vec{r}\,|\psi(\vec{r},t)|^2 = \int_V d\vec{r}\,\psi\psi^*$$

Come cambia nel tempo tale probabilità ? $\frac{\partial}{\partial t}\int_V d\vec{r}\,|\psi(\vec{r},t)|^2 = ?$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi \qquad -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi^*$$

$$\int_V d\vec{r}\,\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \int_V d\vec{r}(-\psi^*\frac{\hbar}{2mi})\nabla^2\psi + \psi\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\psi^* =$$

$$= \frac{\hbar i}{2m}\int_V d\vec{r}\,\psi^*\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\psi^* = -\int_V d\vec{r}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{J} \equiv \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V d\vec{r}P(\vec{r},t) = -\int_V d\vec{r}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

In forma differenziale si ha una equazione di conservazione del numero di particelle analoga a quella di conservazione della carica elettrica:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

Si può interpretare J come densità di corrente di probabilità

proiezione lungo la dir. r $$\vec{J}\cdot\hat{r} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial r}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial r}\psi^*\right)$$

La funzione d'onda per le particelle diffuse dal potenziale:

$$\psi_{diff}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\left(\frac{-2m}{\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int d\vec{x}' e^{i\vec{q}\vec{x}'}V(\vec{x}')\right) = Af(q,\vartheta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{J}_{diff}\cdot\hat{r} = \frac{\hbar}{2mi}|Af|^2\left(\frac{e^{-ikr}}{r}(\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2}) - \frac{e^{ikr}}{r}(\frac{-ike^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r^2})\right) = \frac{\hbar}{2mi}|Af|^2\frac{2ik}{r^2}$$

la velocità delle particelle è v: $v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$ $\rightarrow \vec{J}_{diff}\cdot\hat{r} = |Af|^2\frac{v}{r^2}$

se la radiazione incidente è un onda piana: $\psi_{inc}(z) = Ae^{ikz}$

il numero di particelle per unità di volume è: $|\psi_{inc}(z)|^2 = |A|^2$

il flusso incidente è: $F = v|A|^2$

Il flusso uscente per unità di angolo solido è: $\dfrac{\left(J_{diff} \cdot r^2 d\Omega\right)}{d\Omega} = |Af|^2 v$

La sezione d'urto differenziale è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Flusso uscente per unità di angolo solido}}{\text{Flusso incidente}} = |f|^2$$

Intensità dell'onda diffusa: $I \propto \dfrac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \propto \left| \int d\vec{x}' e^{i\vec{q}\vec{x}'} V(\vec{x}') \right|^2$

trasf. di Fourier del potenziale V con cui ha interagito il fascio di particelle = fattore di struttura !

Riassunto (II parte):

•Eq. di Schrödinger indipendente dal tempo

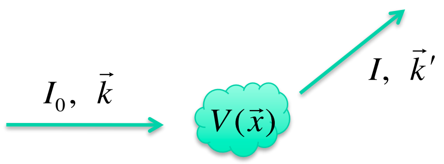
•Funzione di Green (onda sferica)

•*I approssimazione:* località

•*II approssimazione:* approssimazione di Born (teoria delle pert. al I ordine)

•Sezione d'urto (flusso di particelle)

•Intensità diffusa proporzionale alla trasformata di Fourier del potenziale che descrive l'interazione tra particelle e sistema



$$I \propto \frac{d\sigma}{d\omega} = |f|^2 \propto \left| \int d\vec{x}' e^{i\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\vec{x}'} V(\vec{x}') \right|^2$$