Nucleo di Szego:

proprietà geometriche, comportamento asintotico

Un po' di analisi

Operatori Integrali di Fourier

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio di Schwartz di tutte le funzioni complesse C^∞ definite su $\mathbb{R}^n$ tali che $x^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) u$ sia limitata comunque si scelgano i multi-indici α e β.

La trasformata di Fourier data da

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x;\xi\rangle} u(x) \cdot dx.$$

definisce un isomorfismo $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longmapsto \mathcal{S}$ con la seguente inversa:

$$\left(\mathcal{F}^{-1}v\right)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x;\xi\rangle} v(\xi) \cdot d\xi.$$

In particolare, se $u \in \mathcal{S}$, possiamo scrivere

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y;\xi\rangle} u(y)\ dy\ d\xi.$$

Sia P un operatore differenziale di ordine m, avente la forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right),$$

dove $|\alpha|$ è la lunghezza del multi-indice α. Per le ben note proprietà della trasformata di Fourier, abbiamo

$$(Pu)(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y;\xi\rangle} u(y)\, \sigma_P(x;\xi)\ dy\ d\xi\ .$$

$\sigma_P(x;\xi)$ è un polinomio in ξ con coefficienti dipendenti da x, detto **simbolo** di P. Esso è dato da:

$$\sigma_P(x;\xi) = \sum\nolimits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha.$$

DEFINIZIONE

Un operatore pseudo-differenziale A di ordine μ è dato da un'espressione della forma:

$$(Au)(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y;\xi\rangle} u(y)\, a(x;y;\xi)\; dy\; d\xi,$$

$a(x;y;\xi)$ è un simbolo di ordine m,cioè una funzione C^∞ definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tale che, per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e per ogni scelta di multi-indici $\alpha;\beta;\gamma$,

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^\beta}\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \xi^\gamma} a(x;y;\xi)\right| \leq C_{K;\alpha;\beta;\gamma}\left(1 + |\xi|^{m-|\gamma|}\right),$$

$$\forall (x;y) \in K.$$

a può essere un simbolo "classico":

$$a(x;y;\xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x;y) \cdot \xi^{m-j}.$$

DEFINIZIONE

Un Operatore Integrale di Fourier è dato da:

$$(Au)(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x;y;\theta)} u(y)\, a(x;y;\theta)\, dy d\xi,$$

dove $\varphi(x;y;\theta)$ soddisfa le seguenti condizioni:

1. φ è una funzione complessa C^∞ definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tale che, $\forall \lambda > 0$, $\varphi(x;y;\lambda\theta) = \lambda\varphi(x;y;\theta)$ e $Im(\varphi) \geq 0$.

2. In ogni punto in cui $d_\theta\varphi = 0$, abbiamo $d_x\varphi \neq 0$ e $d_y\varphi \neq 0$ e i differenziali $\left\{ d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)\right\}$ sono linearmente indipendenti in ogni punto tale che $d_\theta\varphi = 0$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $\mathcal{D}'(\Omega)$ è il duale dello spazio $C_c^\infty(\Omega)$. Se X e Y sono varietà differenziabili paracompatte, allora c'è una corrispondenza biunivoca tra gli operatori lineari $A : C_c^\infty(Y) \longmapsto \mathcal{D}'(X)$ e le distribuzioni $a \in \mathcal{D}'(X \times Y)$.

$$(A\psi)(\varphi) = a(\varphi \otimes \psi), \forall \varphi \in C_c^\infty(X),$$
$$\psi \in C_c^\infty(Y).$$

Il prodotto tensoriale è dato da:

$$(\varphi \otimes \psi)(x; y) = \varphi(x)\psi(y).$$

a si dice **nucleo distribuzionale** dell'operatore A.

Se A è un operatore integrale della forma

$$(A\psi)(\varphi) = \int\int_{X \times Y} s(x; y)\psi(y)\varphi(x)\ dx\ dy,$$

allora $s(x; y)$ è il nucleo distribuzionale (visto come funzione generalizzata) di A.

Il proiettore di Szego

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con frontiera X di classe C^∞. $L^2(X)$ è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in X; $H(X)$ è lo spazio delle restrizioni ad X delle funzioni olomorfe in Ω, cioè delle funzioni che sono olomorfe in un piccolo aperto contenente X. $H(X)$ si dice spazio di Hardy di X.

Il Proiettore di Szego è la proiezione ortogonale

$$\Pi : L^2(X) \longmapsto H(X).$$

Il proiettore di Szego può essere esteso al caso in cui si lavori su domini limitati di varietà differenziabili.

In più, se il dominio gode della proprietà di essere strettamente pseudo-convesso (come è nel caso che ci interessa!), allora Π può essere definito su tutto lo spazio $\mathcal{D}'(X)$.

TEOREMA (Boutet de Monvel-Sjostrand, 1976)

Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile di dimensione complessa $n+1$; $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ è un dominio strettamente pseudo-convesso con frontiera X. Esiste allora una funzione $\rho : \mathcal{M} \longmapsto \mathbb{R}$ tale che $\rho \leq 0$ solo in Ω e $X = \{x \in \mathcal{M} : \rho(x) = 0\}$. Sia $\psi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longmapsto \mathbb{C}$ tale che:

- $\psi(x; x) = \frac{1}{i}\rho(x)$;
- Sulla diagonale $x = y$, $\overline{\partial}_x \psi(x; y) = \partial_y \psi(x; y) = 0$.
- $\psi(x; y) = -\overline{\psi(y; x)}$.

Allora esiste un simbolo classico di ordine n, $s(x;y;t)$, tale che il nucleo distribuzionale del proiettore di Szego abbia la forma

$$\Pi(x;y) = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x;y)} s(x;y;t)\,dt.$$

Quindi, il proiettore di Szego è un Operatore Integrale di Fourier.

ESEMPIO

Se $B \subset \mathbb{C}^{n+1}$ è la boccia (piena) unitaria e S^n è la frontiera di B, allora il nucleo distribuzionale del proiettore di Szego ha la forma:

$$K_{S^n}(z;w) = \frac{1}{(1-\langle z;w\rangle)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(z;w)} t^n \, dt,$$

dove $\psi(z;w) = 1 - \langle z;w\rangle$.

(Poca) Geometria simplettica

Uno spazio vettoriale simplettico è una coppia $(V;\omega)$ dove V è uno spazio vettoriale di dimensione pari $2n$ e ω è una 2−forma bilineare, antisimmetrica,non-degenere.

Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Il complemento simplettico di Wè

$$W^{\perp} = \{v \in V : \omega\,(v;w) = 0, \forall w \in W\}.$$

Un sottospazio $W \subseteq (V;\omega)$ si dice **Lagrangiano** se $W = W^{\perp}$.

Si dice varietà simplettica una coppia $(\mathcal{M};\omega)$, dove $\mathcal{M}$ è una varietà differenziabile di dimensione pari $2n$ e ω è una 2-forma chiusa tale che ω_p sia in ogni punto una **forma simplettica** su $T_p\mathcal{M}$.

Una sottovarietà $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ si dice Lagrangiana se $T_p\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale Lagrangiano di $T_p\mathcal{M}$, $\forall p \in \mathcal{M}$.

Si dice varietà di contatto una coppia $(\mathcal{N}; \alpha)$, dove $\mathcal{N}$ è una varietà differenziabile di dimensione dispari $2n+1$ e α è una 1-forma tale che $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ sia ovunque non nulla. In particolare, $\forall p \in \mathcal{N}$, $\left(ker\alpha_p; (d\alpha)_p\right)$ è uno spazio vettoriale simplettico contenuto in $T_p\mathcal{N}$.

Una sottovarietà $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$ si dice Legendriana se, $\forall p \in \mathcal{F}$, $T_p\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale Lagrangiano di $\left(ker\alpha_p; (d\alpha)_p\right)$.

Distribuzioni Legendriane

Sia $(M;\omega)$ una varietà simplettica di dimensione complessa n (e quindi di dimensione reale $2n$).

$\pi : L \longrightarrow M$ è un fibrato in rette olomorfo su M: $\forall p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione 1. Su L si definisce una metrica Hermitiana h la cui forma di curvatura è proprio ω. . Sia poi $\pi' : L^* \longmapsto M$ il fibrato in rette duale ad L: $\forall p \in M$, $\pi'^{-1}(p)$ è il duale di $\pi^{-1}(p)$. Per semplicità, indico con h anche la metrica su L^* indotta dalla metrica su L. Ciò significa definire una norma sulla controimmagine di ciascun punto di M in L^*.

Sia $D = \{\nu \in L^* : h(\nu;\nu) \leq 1\}$. Allora D è un dominio strettamente pseudoconvesso su L. Il bordo di D, X, è definito dalla seguente funzione:

$$\rho : L^* \longrightarrow M,\ \rho(\nu) = \|\nu\|_h^2 - 1.$$

Sia $\alpha = \frac{1}{i}\partial\rho_{|X} = -\frac{1}{i}\overline{\partial}\rho_{|X}$.Allora, $(X;\alpha)$ è una varietà di contattodi dimensione reale $2n+1$.

$H(X)$ si spezza in isotipi:

$$H(X) = \oplus_{N=0}^{+\infty} H_N(X),$$

dove $H_N(X) = \left\{ f \in H(X) : f\left(r_\theta x\right) = e^{iN\theta} f(x) \right\}$ (r_θ è l'azione di S^1 su ciascuna fibra).

Dal punto di vista analitico, $H_N(X)$ rappresenta la $N-$esima componente di Fourier delle funzioni in $H\left(X\right)$. Dal punto di vista geometrico, $H_N(X)$ è isomorfo a $H^0\left(M;L^{\otimes N}\right)$.

Sia Λ una sottovarietà Legendriana di X la cui proiezione su M è una sottovarietà Lagrangiana. Tale Λ si dice sottovarietà Legendriana di Bohr-Sommerfeld. Considero poi i seguenti due oggetti:

- La distribuzione δ_{Λ}che associa ad una funzione f su X l'integrale $\int_{\Lambda} f(x)\ dvol$.

- L'$N-$esimo isotipo del proiettore di Szego,

$$\Pi_N : \mathcal{D}'(X) \longmapsto H_N(X).$$

Il nostro obiettivo è quello di studiare

$u_N(x) = \Pi_N(\delta_\Lambda)$,per $N \longmapsto +\infty$. Ciò è particolarmente interessante dal punto di vista geometrico, perchè $\{u_N(x)\}$ sono oggetti algebrici che permettono di studiare alcune proprietà delle sottovarietà Legendriane. Inoltre, rivestono interesse in meccanica quantistica perchè rappresentano "livelli di energia" di particelle che si trovano su Λ (L si dice fibrato quantizzante). Per fare ciò, si applica il Lemma della fase stazionaria (Hormander).

LEMMA DELLA FASE STAZIONARIA

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, X un aperto contenente K e k un intero positivo. Se $u \in C_c^{2k}(K)$; $f \in C^{3k-1}(X)$, $Im\ f \geq 0$ in X, $Im\ f(x_0) = 0$; $df(x_0) = 0$, $\det(Hess(f(x_0))) \neq 0$; $df \neq 0$ in $K \setminus \{x_0\}$, allora

$$\left| \int_X e^{iNf(x)} u(x)\, dx - \frac{e^{iNf(x_0)} \sum_{j<k} N^{-j} L_j u}{\left(\frac{N}{2\pi i} \det(Hess(f(x_0)))\right)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq$$

$$\leq CN^{-k} \sum_{|\alpha| \leq 2k} \sup |D^\alpha u| \text{ per } N \longmapsto +\infty.$$

L_j è un operatore differenziale di ordine $2j$, ed $L_j u(x)$ dipende anche dal valore in x resto della serie di Taylor di u centrata in x_0 arrestata al secondo ordine.

In particolare, se f e u sono C^∞, allora si ha uno sviluppo asintotico:

$$\int_X e^{iNf(x)} u(x)\ dx \sim$$

$$\sim \frac{e^{iNf(x_0)}}{\left(\frac{N}{2\pi i} \det(Hess(f(x_0)))\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{+\infty} N^{-j} L_j u$$

Se,
$\Lambda = \{f(y) = 0; g_1(y) = ... = g_n(x) = 0\}$, allora

$$\delta_\Lambda(y) = \int\int e^{i\left(\tau f(y) + \overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{g_j(y)}\right)} d\tau \, d\eta.$$

Allora,

$$u_N(x) = \int e^{i\left[t\psi(r_\theta x; y) - N\theta + \tau f(y) + \overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{g_j(y)}\right]} a(x; y; t) \, dt d\theta dy d\tau d\eta,$$

e, con le sostituzioni $t \longmapsto Nt$, $\tau \longmapsto N\tau$,

$\eta_j \longmapsto N\eta_j$,

$$u_N(x) = N^{n+2} \int e^{iN\left[t\psi(r_\theta x; y) - \theta + \tau f(y) + \overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{g_j(y)}\right]} a(x; y; Nt).$$

In questo modo, ritroviamo con un nuovo metodo un risultato più preciso di quello ottenuto, nel 1995, da Borthwick-Paul-Uribe, e cioè che:

$$u_N(x) \sim N^{\frac{n}{2}} \left(e^{-\frac{N}{2}(dist(x;\Lambda))^2} \right) + O\left(N^{\frac{n}{2}-1} \right).$$

In più, se Λ_1 e Λ_2 sono due sottovarietà Legendriane di Bohr-Sommerfeld, allora si può calcolare la seguente dualità (rispetto al prodotto scalare in $L^2(X)$):

$$\left\langle \Pi_N\left(\delta_{\Lambda_1}\right); \Pi_N\left(\delta_{\Lambda_2}\right) \right\rangle \sim C(\Lambda_1; \Lambda_2) \cdot N^{\frac{d}{2}} + O\left(N^{\frac{d}{2}-1} \right).$$

d è il massimo tra le dimensioni delle varie componenti connesse di $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$.

Prossimo obiettivo di ricerca: studiare le funzioni $u_N(x; s) = \Pi_N\left(\delta_{\Lambda_s}\right)$, dove $\{\Lambda_s\}$ è una deformazione liscia di Λ lungo speciali traiettorie (dette isodrastiche) e calcolare lo sviluppo asintotico, per N grande, della sua derivata rispetto ad s.

Inoltre, data l'applicazione $BPU : \Lambda \longmapsto \Pi_1(\delta_\Lambda)$ e la sua proiettivizzazione, $\mathbb{P}H^0(M; L)$, a valori in $\mathbb{P}H^0(M; L)$, si vuole calcolare il pull-back della forma di Fubini-Study su $\mathbb{P}H^0(M; L)$ tramite l'applicazione $\mathbb{P}H^0(M; L)$.