Calcolo differenziale su gruppi finiti

Lo spazio $Fun(G)$

G gruppo finito di ordine n, con elemento neutro e;

$Fun(G)$ l'insieme delle funzioni complesse definite su G.

Su $Fun(G)$ si definiscono le seguenti operazioni:

1. $(f \cdot h)(g) = f(g) \cdot h(g)$;

2. $(f + h)(g) = f(g) + h(g)$;

3. $(\lambda f)(g) = \lambda f(g)$;

per ogni $f, h \in Fun(G)$; $g \in G$; $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il gruppo G agisce su se stesso a sinistra tramite traslazioni sinistre e destre:

Si induce l'azione a sinistra $\mathcal{L}_{g_1}$ su $Fun(G)$:

$$(\mathcal{L}_{g_1}(f))(g) = f(g_1 \cdot g), \forall f \in Fun(G), \forall g, g_1 \in Fun(G)$$

e l' azione a destra $\mathcal{R}_{g_1}$ su $Fun(G)$:

$$(\mathcal{R}_{g_1}(f))(g) = f(g \cdot g_1), \forall f \in Fun(G)$$
$$\forall g_1, g \in G$$

DEFINIZIONE

Se $\mathcal{A}$ è un anello, Γ è un gruppo abeliano, si dice che Γ è un **bimodulo** se Γ è sia un $\mathcal{A}$-modulo sinistro, sia un $\mathcal{A}$-modulo destro.

OSSERVAZIONE

Non è richiesto che $x\gamma = \gamma x$, $\forall x \in \mathcal{A}$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Un *calcolo differenziale del primo ordine* su $Fun(G)$ è definito da:

1. Un' applicazione lineare $d : Fun(G) \to \Gamma$ che soddisfi la regola di Leibniz:

   $d(a \cdot b) = (da) \cdot b + a \cdot (db); \ \forall \, a, b \in Fun(G);$

2. La possibilità di esprimere ogni $\rho \in \Gamma$ come $\rho = \sum_{k \in \mathcal{B}} a_k db_k$, per qualche $a_k, b_k \in Fun(G)$. $\mathcal{B}$ è una generica famiglia di indici.

OSSERVAZIONE

Lo "spazio delle 1-forme" è un opportuno bimodulo su $Fun(G)$.

Essendoci $(n-1)$ elementi $\{dx^g\}$ indipendenti, Γ è uno spazio vettoriale di dimensione $n(n-1)$. Una base per Γ è data dall'insieme $\left\{x^g dx^{g'}, g \neq g'\right\}$

Covarianza

Un calcolo differenziale si dice **covariante a sinistra** se l'azione a sinistra di G, $\mathcal{L}_g$, commuta con d.

Un calcolo differenziale si dice **covariante a destra** se l'azione a destra di G, $\mathcal{R}_g$, commuta con d.

La richiesta della covarianza a destra e a sinistra definisce immediatamente l'azione di $\mathcal{L}_g$ e di $\mathcal{R}_g$ sui differenziali:

$$\mathcal{L}_g(a \cdot db) = (\mathcal{L}_g a) \cdot d(\mathcal{L}_g b).$$

$$\mathcal{R}_g(a \cdot db) = (\mathcal{R}_g a) \cdot d(\mathcal{R}_g b).$$

1-forme invarianti

Una 1-forma θ invariante a sinistra è un elemento di Γ tale che

$$\mathcal{L}_g \theta = \theta, \quad \forall \ g \in G.$$

Le 1-forme:

$$\theta^g = \sum_{h \in G} x^{hg} dx^h \quad , \quad \forall \ g \in G.$$

sono *invarianti a sinistra*.

Invertendo la relazione che definisce le 1-forme θ^g, si trova:

$$dx^h = \sum_{g \in G} (x^{hg} - x^h) \cdot \theta^g.$$

Vale la seguente proprietà:

$$\sum_{g\in G} \theta^g = 0.$$

Ci sono $(n-1)$ 1-forme invarianti a sinistra θ^g indipendenti.

Le 1-forme $\{\theta^g, \ g \in G, \ g \neq e\}$ costituiscono un sistema di generatori indipendenti per il bimodulo Γ.

Per ogni $f \in Fun(G)$,

$$f \cdot \theta^g = \theta^g \cdot \mathcal{R}_g f.$$

La geometria differenziale su $Fun(G)$ è non-commutativa, perchè le funzioni non commutano con i differenziali.

L'azione destra su θ^g è data da

$$\mathcal{R}_k \theta^g = \theta^{ad(k)g},$$

dove si definisce $ad(k)g = kgk^{-1}$.

OSSERVAZIONE

E' utile considerare dei **sottocalcoli differenziali** bicovarianti. Essi vengono costruiti partendo da un generico calcolo differenziale su un gruppo finito e quozientando per il sotto-bimodulo generato da alcuni elementi $\{\theta^g\}$, con $g \in H$, $H \subset G$.

Il sottoinsieme H di G deve, tuttavia, soddisfare alcuni requisiti, imposti dalla compatibilità con le azioni a destra e a sinistra.. Ne segue che **l'insieme H è costituito da unioni di classi di coniugio di G.**

ESEMPIO

Il gruppo delle permutazioni su tre oggetti, S_3, è costituito da 6 elementi. L'operazione su S_3 è definita dalla seguente tavola di Cayley:

$\cdot$	e	a	b	c	ab	ba
e	e	a	b	c	ab	ba
a	a	e	ab	ba	b	c
b	b	ba	e	ab	c	a
c	c	ab	ba	e	a	b
ab	ab	c	a	b	ba	e
ba	ba	b	c	a	e	ab

Ci sono due classi di coniugio non banali:

$I = \{a, b, c\}$ e $II = \{ab, ba\}$.

Di conseguenza, esistono tre distinti calcoli differenziali bicovarianti su S_3:

1. $BC_{\mathsf{U}}(\mathsf{S}_3)$ è il calcolo bicovariante universale su S_3. Esso ha come sistema di generatori di bimodulo l'insieme delle 1-forme $\left\{\theta^a, \theta^b, \theta^c, \theta^{ab}, \theta^{ba}\right\}$.

2. $BC_I(\mathsf{S}_3)$ ha come sistema di generatori di bimodulo l'insieme delle 1-forme $\left\{\theta^a, \theta^b, \theta^c\right\}$.

3. $BC_{II}(\mathsf{S}_3)$ ha come sistema di generatori di bimodulo l'insieme delle 1-forme $\left\{\theta^{ab}, \theta^{ba}\right\}$.

Prodotto esterno

Dati due elementi $\rho,\rho' \in \Gamma$, si definisce un prodotto tensoriale che gode delle usuali proprietà:

1. $(\rho a) \otimes \rho' = \rho \otimes (a\rho')$;

2. $a \cdot (\rho \otimes \rho') = (a\rho) \otimes \rho'$;

3. $(\rho \otimes \rho') \cdot b = \rho \otimes (\rho' b)$.

$$\Gamma \otimes \Gamma = \{\rho \otimes \rho' \text{ tali che } \rho,\rho' \in \Gamma\}.$$

Su $\Gamma \otimes \Gamma$ si può definire un **unico** automorfismo Λ tale che :

1. $\Lambda(\theta \otimes \omega) = \omega \otimes \theta$, per ogni θ,$\omega \in \Gamma$, θ invariante a sinistra, ω invariante a destra;

2. $\Lambda(a \cdot \eta) = a \cdot \Lambda(\eta)$;

3. $\Lambda(\eta \cdot b) = \Lambda(\eta) \cdot b$; $\forall a,b \in Fun(G)$, $\eta \in \Gamma \otimes \Gamma$.

Per calcolare $\Lambda\left(\theta^{g} \otimes \theta^{g'}\right)$, si utilizza la seguente relazione tra le 1-forme invarianti a destra e a sinistra:

$$\theta^{k} = \sum_{h \in G} x^{h} \cdot \omega^{ad(h)k}, \quad \forall\ k \in G.$$

In conclusione,

$$\Lambda\left(\theta^{g} \otimes \theta^{g'}\right) = \theta^{ad(g^{-1})g'} \otimes \theta^{g}$$

Si definisce il **prodotto esterno** come

$$\rho \wedge \rho' = \rho \otimes \rho' - \Lambda\left(\rho \otimes \rho'\right).$$

In particolare, per le 1-forme di base invarianti a sinistra, si osserva che

$$\theta^{g} \wedge \theta^{g'} = \theta^{g} \otimes \theta^{g'} - \theta^{g^{-1}g'g} \otimes \theta^{g}.$$

Si verifica che

$$\theta^{g} \wedge \theta^{g} = 0, \quad \forall g \in G$$

Derivata esterna

Si definisce la *derivata esterna* come l'applicazione $d : \Gamma^{\wedge m} \longrightarrow \Gamma^{\wedge(m+1)}$ tale che

$d(b_0 db_1 \wedge db_2 \wedge \ldots \wedge db_m) = db_0 \wedge db_1 \wedge db_2 \wedge \ldots \wedge db_m.$

Vale la seguente regola: se $\rho \in \Gamma^{\wedge k}$ e $\rho' \in \Gamma^{\wedge k'}$, allora

$$d(\rho \wedge \rho') = (d\rho) \wedge \rho' + (-1)^k \rho \wedge d\rho'.$$

Poichè $dI = 0$, si ottiene

$$d(d\rho) = 0.$$

DEFINIZIONE

Si consideri una k-forma $\omega \in \Gamma^{\wedge k}$. ω si dice *chiusa* se $d\omega = 0$; ω si dice *esatta* se esiste una $(k-1)$-forma $\tau \in \Gamma^{\wedge(k-1)}$ tale che $\omega = d\tau$. Si denota con $Z^k(G)$ lo spazio delle k-forme chiuse e con $B^k(G)$ lo spazio delle k-forme esatte. Per le proprietà della derivata esterna, se $\rho \in \Gamma^{\wedge(k-1)}$, allora $d(d\rho) = 0$; di conseguenza, $B^k(G) \subseteq Z^k(G)$. Si definisce lo spazio quoziente

$$H^k(G) = Z^k(G)/B^k(G).$$

$\mathrm{H}^k(\mathrm{G})$ si dice k-esima coomologia di de Rham non-commutativa di G.

Integrazione

Su tutti gli esempi studiati fino ad ora si è trovato che, per un calcolo differenziale con m vettori tangenti indipendenti, esiste un intero $p \geq m$ tale che lo spazio delle p-forme abbia dimensione 1, mentre tutte le k-forme, per ogni $k > p$, sono nulle. Ogni prodotto esterno di p 1-forme di base, $\theta^{g_1} \wedge \theta^{g_2} \wedge ... \wedge \theta^{g_p}$ è proporzionale ad uno di questi prodotti, chiamato *forma di volume,* che si indica con vol:

$$\theta^{g_1} \wedge \theta^{g_2} \wedge ... \wedge \theta^{g_p} = \varepsilon^{g_1, g_2, \cdots, g_p} \cdot vol.$$

$\varepsilon^{g_1, g_2, \cdots, g_p}$ è la costante di proporzionalità. Essa può valere $+1$ oppure -1.

La p-forma di volume è invariante sia a sinistra che a destra.

Data $f \in Fun(G)$, si definisce l'*integrale* di f come:

$$\int f \cdot vol = \sum_{g \in G} f(g).$$

Poichè la forma di volume è invariante a destra e a sinistra, valgono le uguaglianze

- $\int (\mathcal{L}_g f) \cdot vol = \int f \cdot vol,$
- $\int (\mathcal{R}_g f) \cdot vol = \int f \cdot vol.$

Sia ρ una p-forma. Allora, si può scrivere

$$\rho = \sum_{g_1, g_2, \ldots, g_p \in G} \rho_{g_1, g_2, \ldots, g_p} \cdot \theta^{g_1} \wedge \theta^{g_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{g_p} = \sum_{g_1, g_2, \ldots, g_p \in G} \rho_{g_1, g_2, \ldots, g_p} \cdot \varepsilon^{g_1, g_2, \ldots, g_p} \cdot vol,$$

dove $\rho_{g_1, g_2, \ldots, g_p} \in Fun(G)$.

Si definisce, di conseguenza, l'integrale di ρ come

$$\int \rho = \sum_{g_1,g_2,\dots,g_p \in G} \sum_{g \in G} \rho_{g_1,g_2,\dots,g_p}(g) \cdot \varepsilon^{g_1,g_2,\dots,g_p}.$$

Duale di Hodge

Si chiama *duale di Hodge* l'unica applicazione che ad ogni k-forma $\sigma \in \Gamma^{\wedge k}$ associa una $(p-k)$-forma $(*\sigma)$ tale che, $\forall\ \rho \in \Gamma^{\wedge k}$,

$$\rho \wedge (*\sigma) =< \rho,\sigma > \cdot vol.$$

Il duale di Hodge è lineare a destra e a sinistra:

$$*\,(f \cdot \sigma \cdot h) = f \cdot (*\sigma) \cdot h$$

$\forall\ f, h \in Fun(G)$.

Il duale di Hodge commuta con l'involuzione $*$:

$$(*\rho)^* = *\,(\rho^*).$$

La coomologia del gruppo S_3

Considero il calcolo differenziale bicovariante su S_3 avente come generatori del bimodulo Γ $\left\{\theta^a,\theta^b,\theta^c\right\}$. Lo spazio delle 2-forme $\Gamma^{\wedge 2}$ ha dimensione 4 come bimodulo. Un suo sistema di generatori è dato da

$$\left\{\theta^a \wedge \theta^b, \theta^a \wedge \theta^c, \theta^b \wedge \theta^c, \theta^c \wedge \theta^b\right\}.$$

Lo spazio delle 3-forme $\Gamma^{\wedge 3}$ ha dimensione 3 come bimodulo. Un suo sistema di generatori, come bimodulo, è dato da:

$$\left\{\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c, \theta^a \wedge \theta^c \wedge \theta^b, \theta^b \wedge \theta^a \wedge \theta^c\right\}.$$

Lo spazio delle 4-forme $\Gamma^{\wedge 4}$ ha dimensione 1 come bimodulo. Si sceglie come forma di volume la 4-forma

$$vol = \theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^a \wedge \theta^c;$$

Si ottengono, di conseguenza, i seguenti risultati:

$$\mathbf{H^0(S_3)} = \mathbb{C};$$

$$\mathbf{H^1(S_3)} = \mathbb{C};$$

$$\mathbf{H^2(S_3)} = \{0\};$$

$$\mathbf{H^3(S_3)} = \mathbb{C};$$

$$\mathbf{H^4(S_3)} = \mathbb{C};$$

Considero il calcolo differenziale bicovariante su $\mathbb{Z}_4$ avente come generatori del bimodulo Γ $\left\{\theta^{[1]},\theta^{[2]},\theta^{[3]}\right\}$. Lo spazio delle 2-forme $\Gamma^{\wedge 2}$ ha dimensione 3 come bimodulo. Un suo sistema di generatori è dato da

$$\left\{\theta^{[1]} \wedge \theta^{[2]}, \theta^{[1]} \wedge \theta^{[3]}, \theta^{[2]} \wedge \theta^{[3]}\right\}.$$

Lo spazio delle 3-forme $\Gamma^{\wedge 3}$ ha dimensione 1 come bimodulo. Si sceglie come forma di volume la 3-forma

$$vol = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3;$$

Il gruppo $\mathbb{Z}_4$ è abeliano, dunque il prodotto esterno è anti-simmetrico.

Si ottengono, di conseguenza, i seguenti risultati:

$$\mathbf{H}^{\mathbf{0}}_{\mathsf{U}}\,(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{C}.$$

$$\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathsf{U}}\,(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

$$\mathbf{H}^{\mathbf{2}}_{\mathsf{U}}\,(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

$$\mathbf{H}^{\mathbf{3}}_{\mathsf{U}}\,(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{C}.$$

Questa ricerca è stata svolta per tutti i gruppi finiti di ordine minore o uguale di 8. Ecco i risultati

Table 1: de Rahm cohomology of S_3, Q, D_4, Z_N

S_3	$\theta^a, \theta^b, \theta^c$	KN=9

order	0	1	2	3	4
$\sharp$	1	3	4	3	1
b_k	1	1	0	1	1

S_3	θ^{ab}, θ	KN=2

order	0	1	2		
$\sharp$	1	2	1		
b_k	2	4	2		

S_3	$\theta^a, \theta^b, \theta^c, \theta^{ab}, \theta^{ba}$	KN=11

order	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sharp$	1	5	14	31	58	95	140	...
b_k	1	2	1	2	4	...	...	...

Q	$\theta^i, \theta^{i^{-1}}, \theta^j, \theta^{j^{-1}}$	KN=4

order	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sharp$	1	4	8	12	14	12	8	4	1
b_k	1	2	1	2	4	2	1	2	1

D_4	$\theta^2, \theta^4, \theta^5, \theta^6$	KN=4

order	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sharp$	1	4	8	12	14	12	8	4	1
b_k	1	2	1	2	4	2	1	2	1

Z_N	$\theta^u, \theta^{u^{-1}}$	KN=2

order	0	1	2		
$\sharp$	1	2	1		
b_k	1	2	1		

dove l'ordine k di forme indipendenti, il numero $\sharp$ di k-forme indipendenti e il k-esimo Betti numero b_k are elencati per i tre gruppi non-abeliani S_3, Q, D_4 e per i gruppi ciclici Z_N. Le 1-forme indipendenti che caratterizzano il calcolo differenziale sono indicate insieme con i numeri dei nodi KN per i trefoils.

Sullo spazio vettoriale $\Gamma^{\wedge k}$ si può definire il seguente prodotto interno:

$$<< \rho, \sigma >> = \int_G \rho^* \wedge (*\sigma)$$

Il prodotto interno precedentemente definito può essere esteso alla somma diretta $\bigoplus_k \Gamma^{\wedge k}$, imponendo l'ortogonalità degli spazi $\Gamma^{\wedge i}$ e $\Gamma^{\wedge j}$ quando $i \neq j$.

Si definisce l'aggiunto della derivata esterna d come l'unica applicazione $\delta : \Gamma^{\wedge k} \longrightarrow \Gamma^{\wedge (k-1)}$ tale che

$$\langle d\alpha; \beta \rangle = \langle \alpha; \delta\beta \rangle, \ \forall \ \alpha \in \Gamma^{\wedge (k-1)}, \ \forall \ \beta \in \Gamma^{\wedge k}.$$

Se il gruppo G è abeliano, allora l'aggiunto della derivata esterna assume la solita forma esplicita:

$$\delta = (-1)^{p(k+1)+1} * \mathbf{d} *.$$

DEFINIZIONE

L'**operatore Laplaciano** è definito da $\Delta : \Gamma^{\wedge k} \longrightarrow \Gamma^{\wedge k}$

$$\boldsymbol{\Delta = \delta d + d\delta}.$$ DEFINIZIONE

Si definisce lo spazio delle $\mathbf{k}$-**forme armoniche:**

$$Harm(k) = \left\{\omega \in \Gamma^{\wedge k} \text{ tali che } \Delta\omega = 0\right\}.$$

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE DI HODGE (vale supponendo l'esistenza della forma di volume)

Se $\Delta\left(\Gamma^{\wedge k}\right)$ è l'immagine dell'operatore Laplaciano, vale la seguente decomposizione:

$\Gamma^{\wedge k} = \Delta\left(\Gamma^{\wedge k}\right) \oplus Harm(k)$,ovvero $\Gamma^{\wedge k} = d\left(\Gamma^{\wedge (k-1)}\right) \oplus \delta\left(\Gamma^{\wedge (k+1)}\right) \oplus Harm(k)$.

TEOREMA

Ogni classe di coomologia di de Rham possiede un unico rappresentante armonico.

TEOREMA (**Dualità di Poincarè per la coomologia di de Rham sui gruppi finiti).**

Se vale la relazione $\Delta * = * \Delta$ *allora gli spazi vettoriali di coomologia* $H^k(G)$ *e* $H^{n\text{-}k}(G)$ *sono isomorfi.*