Problemi di topologia metrica.

1.) Sia X un insieme, munito di una distanza $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Siano x_1;x_2;x_3;x_4 quattro punti qualsiasi di X. Verificare che:

$$d(x_1; x_4) \leq d(x_1; x_2) + d(x_2; x_3) + d(x_3; x_4).$$

2.) Sia X un insieme, munito di una distanza $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Siano x_1;x_2;x_3;x_4 quattro punti qualsiasi di X. Verificare che:

$$|d(x_1; x_4) - d(x_2; x_3)| \leq d(x_1; x_2) + d(x_3; x_4).$$

3.) In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$\begin{gathered} d((x_1; x_2); (y_1; y_2)) = \\ = a|y_1 - x_1| + b|y_2 - x_2| + c(y_1 - x_1) + f(y_2 - x_2) + g, \end{gathered}$$

dove $a; b; g; f; c \in \mathbb{R}$. Quali valori possono essere assunti da a, b, c, f, g affinchè d sia una distanza?

4.) In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la funzione $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$d(x; y) = min\{d_E(x; y); 1\}.$$

d_E è la distanza euclidea. Ad esempio, $d_1((0; 0); (0; 2)) = min\{2; 1\} = 1$.
Altro esempio: $d_1\left((0; 0); \left(0; \frac{1}{2}\right)\right) = min\left\{\frac{1}{2}; 1\right\} = \frac{1}{2}$.
Verificare che d_1 è una distanza.

5.) Disegnare per la distanza d_1 le bocce $B_{\frac{1}{3}}((0; 0))$; $B_1((0; 0))$ e $B_2((0; 0))$.

6.) Dimostrare che d_1 è TOPOLOGICAMENTE equivalente alla distanza euclidea d_E ma non è ALGEBRICAMENTE equivalente alla stessa.

7.) Sia $X = C^0([0; 1])$ l'insieme delle funzioni CONTINUE definite sull'intervallo chiuso $[0; 1]$. Sia $d_\infty : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ data da:

$$d_\infty(f; g) = \max_{x \in [0;1]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Dimostrare che d_∞ è una distanza su X.

8.) Sia $0 \in C^0([0; 1])$ la funzione nulla. Scrivere esplicitamente cosa è la boccia $B_1(0)$, rispetto alla distanza dell'esercizio precedente.

9.) Indico con $[x]$ l'approssimazione intera per eccesso di un numero reale x. Ad esempio, si ha $[1, 5] = 2$; $[\pi] = 4$. Definisco $d_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, data da

$$d_i(p; q) = [d_E(p; q)],$$

dove d_E è la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che d_i è una distanza su $\mathbb{R}^2$.

10.) Rispetto alla distanza d_i, disegnare le bocce $B_{\frac{1}{2}}\left((0;0)\right)$; $B_{\frac{3}{2}}\left((0;0)\right)$; $B_2\left((0;0)\right)$.

11.) Verificare che d_i non è nè TOPOLOGICAMENTE nè ALGEBRICAMENTE equivalente alla distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$.

12.) E' vero che d_i è TOPOLOGICAMENTE equivalente alla distanza discreta?

13.) E' vero che d_i è ALGEBRICAMENTE equivalente alla distanza discreta oppure no?

14.) E' vero che il quadrato di una distanza è ancora una distanza?

15.) Sia $(X;d)$ uno spazio metrico, e siano $A;B$ due sottoinsiemi tali che $A \subseteq B$. Dimostrare che $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

16.) Sia $(X;d)$ uno spazio metrico, e siano $\{x_1;x_2;x_3;x_4\} = Y$ un sottoinsieme costituito da 4 punti distinti. Sia d_Y la distanza indotta su Y, e sia d_D la distanza discreta su Y.

Ricordo che $d_D\left(x_i;x_j\right) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad i=j \\ \\ 1 & \text{per} \quad i \neq j \end{cases}.$

E' vero che d_D è algebricamente equivalente alla distanza d_Y?

17.) Siano $(X;d_X)$ e $(Y;d_Y)$ due spazi metrici. Verificare che un'applicazione COSTANTE $f : X \longrightarrow Y$ è sempre continua.

18.) Siano $(X;d_X)$ e $(Y;d_Y)$ due spazi metrici. Supponiamo che d_X sia la distanza discreta su X. Verificare che ogni applicazione $f : X \longrightarrow Y$ è continua.

19.) Sia $(X;d)$ uno spazio metrico, e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio. Consideriamo l'applicazione INCLUSIONE, data da:

$$\iota : Y \longrightarrow X,$$
$$\iota\left(y\right) = y,$$

dove, nel membro di sinistra, $y \in Y$, mentre nel membro di destra y è lo stesso elemento, ma inteso nello spazio ambiente X. Verificare che ι è un'applicazione continua.

20.) Siano d_D e d_E, rispettivamente, la distanza discreta e la distanza euclidea su $\mathbb{R}$, e sia $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione identica.

E' vero che $I : (\mathbb{R};d_D) \longrightarrow (\mathbb{R};d_D)$ è continua?

E' vero che $I : (\mathbb{R};d_D) \longrightarrow (\mathbb{R};d_E)$ è continua?

E' vero che $I : (\mathbb{R};d_E) \longrightarrow (\mathbb{R};d_D)$ è continua?

E' vero che $I : (\mathbb{R};d_E) \longrightarrow (\mathbb{R};d_E)$ è continua?

21.) Verificare che la proiezione $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x; y) = x$ è continua rispetto alle rispettive distanze euclidee su $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}$.

22.) Sia $(X; d)$ uno spazio metrico. Verificare che, per ogni coppia di punti **distinti** $x; y$ esistono due bocce -centrate una in x e una in y- **disgiunte**. Tale proprietà si dice **proprietà di Hausdorff.**

23) Sia $(X; d)$ uno spazio metrico, $x \in X$. Verificare che esiste una famiglia **numerabile** di bocce centrate in x, $\mathcal{B} = \{B_1; B_2; ...\}$ tali che, per ogni boccia $B_r(x)$ centrata in x, esista almeno una boccia $B_i \in \mathcal{B}$ tale che $B_i \subseteq B_r(x)$. Questa proprità degli spazi metrici si dice **Primo assioma di numerabilità.**

24.) Una successione $\{x_1; x_2; ...\}$ si dice **successione di Cauchy** se

$$\begin{array}{l} \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tale che} \\ d(x_i; x_j) < \varepsilon,\ \forall\ i; j \geq N \ \textbf{.} \end{array}$$

Questo significa che, per n abbastanza grande, i punti della successione $\{x_n\}$ si addensano in una certa zona. Verificare che una successione convergente è sempre di Cauchy.

25.) Uno spazio metrico $(X; d)$ si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge ad un elemento di X. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ con la distanza indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$ non è completo.

26.) Dimostrare che $\mathbb{Z}$ con la distanza indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$ è completo.

27.) Dimostrare che uno spazio metrico **discreto** (cioè dotato della distanza discreta) è completo.

28.) OSSERVAZIONE: $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea è completo. Questa è una delle proprietà caratterizzanti della retta reale.

29.) Verificare che l'intervallo $(0; 1)$ di $\mathbb{R}$ con la distanza indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$ non è completo.

30.) Verificare che l'intervallo $[0; 1]$ di $\mathbb{R}$ con la distanza indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$ è completo (usare l'osservazione 28).

31.) Sia $(X; d)$ uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ un sottoinsieme e $\{x_n\}$ una successione in Y. Verificare che se $\{x_n\}$ converge ad un limite L, allora $L \in \overline{Y}$.

32.) In $(\mathbb{R}; d_E)$, dove d_E è la distanza euclidea, calcolare la chiusura e la frontiera del sottoinsieme

$$Y = \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}.$$

33.) Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la distanza euclidea, e si dica se i seguenti sottoinsiemi sono connessi e/o compatti (rispetto alla distanza indotta su di essi):

$$A = [0;1] \times \mathbb{R};$$
$$B = [0;1] \times [0;1];$$
$$C = [0;1] \times \mathbb{Q};$$
$$D = [0;1] \times ([0;1] \cap \mathbb{Q}).$$

34.) Si consideri $\mathbb{R}^4$ con la distanza euclidea, e si dica se i seguenti sottoinsiemi sono compatti (rispetto alla distanza indotta su di essi):

$$C_1 = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\};$$
$$C_2 = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : z = w = 0\};$$
$$C_3 = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : y = z = w = 0\};$$
$$C_4 = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = w = 0\}.$$

Si dica se i seguenti sottoinsiemi sono connessi (rispetto alla distanza indotta su di essi):

$$A_1 = \mathbb{R}^4 \setminus C_1;$$
$$A_2 = \mathbb{R}^4 \setminus C_2;$$
$$A_3 = \mathbb{R}^4 \setminus C_3;$$
$$A_4 = \mathbb{R}^4 \setminus C_4.$$

35.) Sia $Y = \{\clubsuit; \heartsuit\}$ un insieme dotato della distanza discreta, e sia $(X;d)$ uno spazio metrico. Dimostrare che $(X;d)$ è sconnesso se e solo se esiste un'applicazione continua non costante $f : (X;d) \longrightarrow Y$.

Soluzioni

PROBLEMA 1.)

$d(x_1; x_4) \leq d(x_1; x_2) + d(x_2; x_4) \leq$

$\leq d(x_1; x_2) + d(x_2; x_3) + d(x_3; x_4)$

(ho applicato due volte la disuguaglianza triangolare).

PROBLEMA 2.)

Supponiamo che, per esempio, $d(x_1; x_4) \geq d(x_2; x_3)$. Allora, la disuguaglianza del problema 2.) equivale a

$$d(x_1; x_4) \leq d(x_1; x_2) + d(x_2; x_3) + d(x_3; x_4),$$

perchè basta togliere il valore assoluto. Ma questo è esattamente ciò che è stato dimostrato essere vero nel problema 1.). Viceversa, se $d(x_1; x_4) < d(x_2; x_3)$, la disuguaglianza del problema 2.) equivale a

$$d(x_2; x_3) \leq d(x_1; x_2) + d(x_1; x_4) + d(x_3; x_4),$$

perchè per togliere il valore assoluto occorre cambiare il segno del membro di sinistra. Applicando la proprietà simmetrica, è possibile riscrivere la disuguaglianza precedente come:

$$d(x_2; x_3) \leq d(x_2; x_1) + d(x_1; x_4) + d(x_4; x_3).$$

Questa è sempre la disuguaglianza del problema 1.). Infatti, questa è ottenuta solo cambiando i NOMI dei punti (la disuguaglianza del problema 1. vale per ogni quaterna di punti...).

PROBLEMA 3.)

Deve essere $g = 0$, perchè altrimenti non sarebbe vero che $d(p; p) = 0$. Deve poi essere $c = f = 0$ (altrimenti non varrebbe la proprietà simmetrica!), dato che $(y_1 - x_1) \neq (x_1 - y_1)$ e $(y_2 - x_2) \neq (x_2 - y_2)$.

Infine, $a > 0$ e $b > 0$ sono le ulteriori condizioni da porre. Infatti, se fosse $a < 0$ oppure $b < 0$, la distanza potrebbe assumere valori negativi. Se fosse $a = 0$, allora $d((0; 0); (1; 0)) = 0$, e questo non può accadere. Analogamente, non può essere $b = 0$.

PROBLEMA 4.)

Ovviamente, $1 \geq 0$ e $d_E(x; y) \geq 0$, $\forall\ x; y \in \mathbb{R}^2$. Quindi, $d_1(x; y) \geq 0$, $\forall\ x; y \in \mathbb{R}^2$. Vale quindi la prima proprietà delle distanze.

$d_1(x; y) = 0$ se e solo se $d_E(x; y) = 0$, ovvero $x = y$. Vale quindi la proprietà 1BIS delle distanze.

$d_1(x; y) = min\{d_E(x; y); 1\} = min\{d_E(y; x); 1\} = d_1(y; x)$. Vale quindi la proprietà simmetrica.

Dimostro ora la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.

Devo verificare che, $\forall\ x; y; z \in \mathbb{R}^2$, $d_1\,(x; z) \leq d_1\,(x; y) + d_1\,(y; z)$.

Supponiamo dapprima che $d_E\,(x; z) \leq 1$. Dato che la distanza euclidea soddisfa la disuguaglianza triangolare,

$$d_1(x; z) = d_E\,(x; z) \leq d_E\,(x; y) + d_E\,(y; z).$$

Se $d_E\,(x; y) \leq 1$ e $d_E\,(y; z) \leq 1$, allora ovviamente

$$d_1\,(x; z) \leq d_1\,(x; y) + d_1\,(y; z).$$

Se, invece, $d_E\,(x; y) \geq 1$ oppure $d_E\,(y; z) \geq 1$, la disuguaglianza alla riga precedente è comunque vera, dato che, come supposto in partenza, $d_1(x; z) = d_E\,(x; z) \leq 1$.

Ora considero il caso in cui $d_E\,(x; z) > 1$. Allora, $d_1\,(x; z) = 1$. Ci sono 4 possibilità:

a.) $d_E\,(x; y) > 1$ e $d_E\,(y; z) > 1$. Allora, $d_1\,(x; y) = 1$ e $d_1\,(y; z) = 1$, e così

$$d_1\,(x; z) = 1 \leq 2 = d_1\,(x; y) + d_1\,(y; z).$$

b.) $d_E\,(x; y) \leq 1$ e $d_E\,(y; z) > 1$. Allora, $d_1\,(y; z) = 1$. Così,

$$d_1\,(x; z) = 1 \leq 1 + d_E\,(x; y) = d_1\,(x; y) + d_1\,(y; z).$$

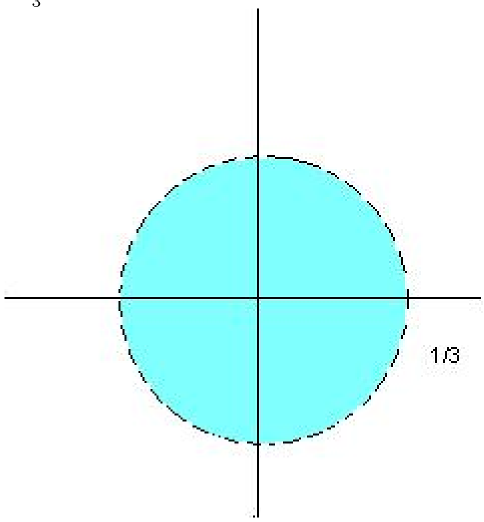
c.) $d_E\,(x; y) > 1$ e $d_E\,(y; z) \leq 1$. Si procede come nel punto b.)

d.) $d_E\,(x; y) \leq 1$ e $d_E\,(y; z) \leq 1$. Allora,

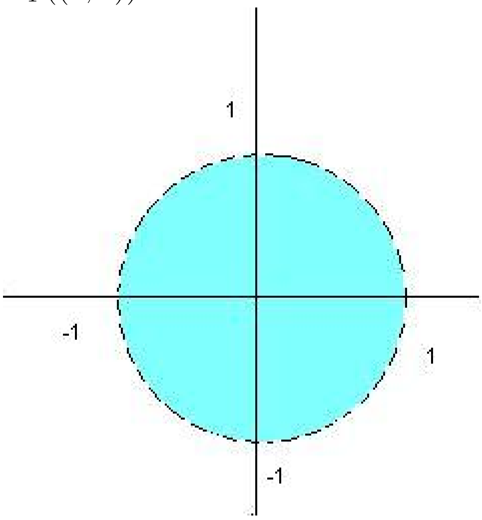
$$\begin{aligned} 1 \leq d_E\,(x; z) \leq d_E\,(x; y) + d_E\,(y; z) = \\ = d_1\,(x; y) + d_1\,(y; z). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.)

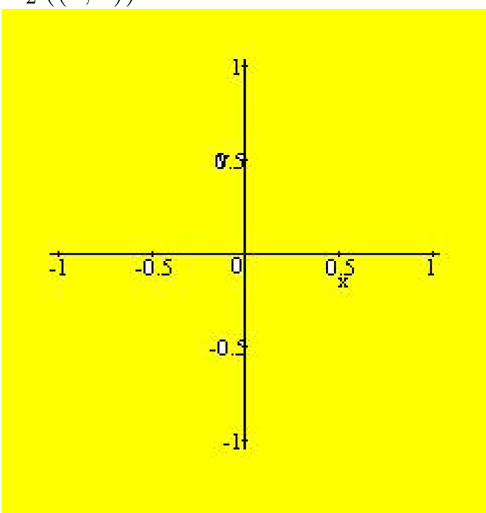
$B_{\frac{1}{3}}\,((0; 0))$:



$B_1\left((0;0)\right)$:



$B_2\left((0;0)\right)$:



PROBLEMA 6.)

d_1 è topologicamente equivalente alla distanza euclidea. Prima di tutto, se $\varepsilon \leq 1$, $B_{\varepsilon,d_1}(x_0) = B_{\varepsilon,d_E}(x_0)$. Quindi, per $\varepsilon \leq 1$, la boccia $B_{\varepsilon,d_1}(x_0)$ è unione di bocce per la distanza d_E, e viceversa. Per $\varepsilon > 1$, è comunque evidente che $B_{\varepsilon,d_1}(x_0) = \mathbb{R}^2$ è unione di bocce per d_E, e che $B_{\varepsilon;d_E}(x_0)$ è unione di bocce per d_1 aventi raggio minore di 1.

d_1 è limitata, mentre d_E è illimitata: quindi, non esiste alcuna costante tale che $d_E(x;y) \leq \alpha \cdot d_1(x;y)$, $\forall\ x;y \in \mathbb{R}^2$. Allora, d_1 e d_E non sono algebricamente equivalenti.

PROBLEMA 7.)

-) $d_\infty(f;g)$ è sempre positiva, e si annulla se e solo se $|f(x) - g(x)| = 0$, $\forall\ x \in [0;1]$.

-) $d_{\infty}(f;g) = \max\limits_{x\in[0;1]} \{|f(x) - g(x)|\} = \max\limits_{x\in[0;1]} \{|g(x) - f(x)|\} = d_{\infty}(g;f)$.

-) Se $f; g; h \in C^0([0;1])$,

$$\begin{gathered} d_{\infty}(f;h) = \max_{x\in[0;1]} \{|f(x) - h(x)|\} \leq \\ \leq \max_{x\in[0;1]} \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\} \leq \\ \leq \max_{x\in[0;1]} \{|f(x) - g(x)|\} + \max_{x\in[0;1]} \{|g(x) - h(x)|\} \leq \\ \leq d_{\infty}(f;g) + d_{\infty}(g;h). \end{gathered}$$

Il passaggio dalla seconda alla terza riga è dato dall'osservazione che il **massimo della somma** di due funzioni non può mai superare la somma dei massimi assunti dalle due funzioni (che potrebbero essere assunti eventualmente in due punti diversi).

PROBLEMA 8.)

$B_1(0)$ è l'insieme delle funzioni continue su $[0;1]$ il cui grafico è contenuto nel rettangolo $[0;1] \times [-1;1]$.

PROBLEMA 9.)

-) d_i è sempre positiva. $d_i(p;q) = 0$ se e solo se $d_E(p;q) = 0$, ovvero $p = q$.

-) $d_i(p;q) = [d_E(p;q)] = [d_E(q;p)] = d_i(q;p)$.

-) $\forall\ p; q; s \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$d_i(p;s) = [d_E(p;s)] \leq [d_E(p;q) + d_E(q;s)] \leq$

$\leq [[d_E(p;q)] + [d_E(q;s)]]$.

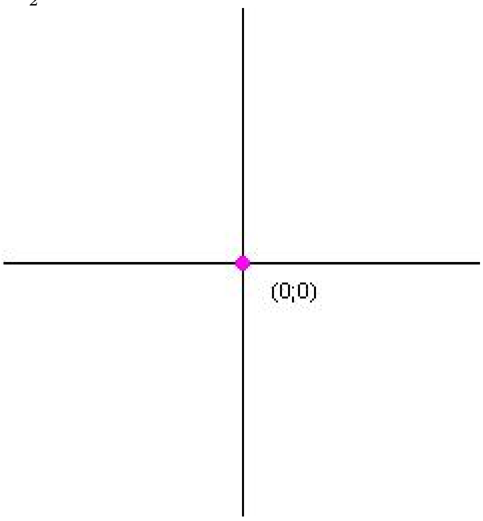
Ma $[d_E(p;q)]$ e $[d_E(q;s)]$ sono entrambi interi, quindi

$$[[d_E(p;q)] + [d_E(q;s)]] = [d_E(p;q)] + [d_E(q;s)].$$

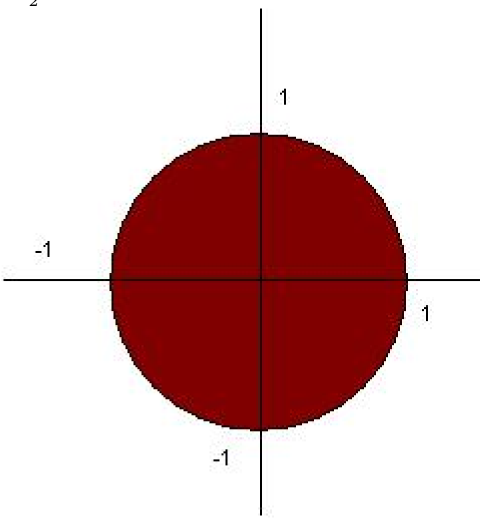
Pertanto, $d_i(p;s) \leq [d_E(p;q)] + [d_E(q;s)] = d_i(p;q) + d_i(q;s)$.

PROBLEMA 10.)

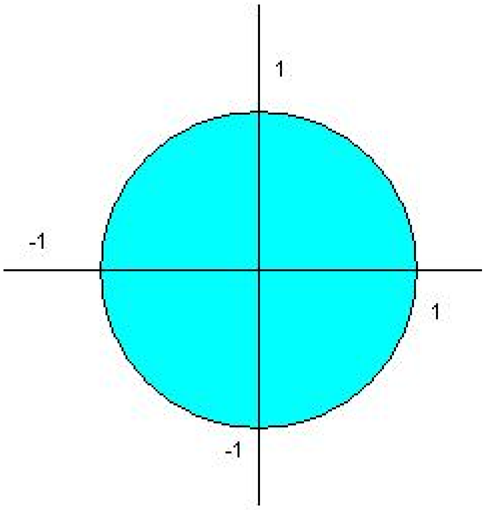
$B_{\frac{1}{2}}\left((0;0)\right)$:



$B_{\frac{3}{2}}\left((0;0)\right)$:



$B_2\left((0;0)\right)$:



Si noti che, in questo caso, le bocce contengono anche il bordo.

PROBLEMA 11.)

La boccia $B_{\frac{1}{2};d_i}\left((0;0)\right)$ rispetto alla distanza d_i è costituita dal solo punto $\{(0;0)\}$. Un punto non può essere unione di bocce euclidee, perchè queste hanno una "zona interna". Dunque, la distanza d_i non è topologicamente equivalente alla distanza euclidea. Dato che

$$\text{equivalenza algebrica} \Longrightarrow \text{equivalenza topologica},$$

d_i non può essere algebricamente equivalente alla distanza euclidea.

PROBLEMA 12.)

Sia $x \in \mathbb{R}^2$ un qualsiasi punto. Rispetto alla distanza d_i, $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. Quindi, ogni punto è boccia per la distanza d_i. Analogamente, ogni punto è anche una boccia per la distanza discreta. Quindi, ogni boccia per d_i è unione di punti, e quindi di bocce della distanza discreta. Viceversa, ogni boccia per la distanza discreta è unione di punti, e quindi di bocce per d_i.

Quindi, d_i è topologicamente equivalente alla distanza discreta.

PROBLEMA 13.)

La distanza discreta è sempre limitata, essendo più piccola di 1.

La distanza d_i è illimitata.

Quindi, non esiste alcuna costante tale che $\alpha \cdot d_i \leq d_D$, dove d_D è la distanza discreta.

PROBLEMA 14.)

Non è vero che il quadrato di una distanza è ancora una distanza. Ad esempio, si consideri $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x;y) = |y - x|$. Allora, $d^2(x;y) = (y-x)^2$. d^2 non soddisfa la disuguaglianza triangolare: dovrebbe essere, per esempio,

$d^2(0;5) \leq d^2(0;3) + d^2(3;5)$.

Invece, si vede che $25 \geq 9 + 4$!!

PROBLEMA 15.)

Sia $x \in \overline{A}$. Allora, $\forall\, \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Poichè $A \subseteq B$, $B_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$, e così $x \in \overline{B}$.

PROBLEMA 16.)

Sia $M = max\{d_Y(x_i; x_j)\}$, e sia $m = min\{d_Y(x_i; x_j), i \neq j\}$. Allora, si vede subito che

$$\tfrac{1}{M} d_Y(x;y) \leq d_D(x;y) \leq \tfrac{1}{m} d_Y(x;y),\ \forall\, x;y \in Y.$$

In aggiunta, la distanza indotta da uno spazio metrico su un sottoinsieme costituito da un numero finito di punti è sempre algebricamente equivalente a quella discreta sullo stesso sottoinsieme (provare a dimostrarlo: la dimostrazione è simile a quanto scritto sopra).

PROBLEMA 17.)

Se f è costante, allora esiste $y_0 \in Y$ tale che $f(x) = y_0$, per ogni $x \in X$. Ci sono due possibilità:

- Se $A \subseteq Y$ è un aperto non contenente y_0, allora $f^{-1}(A) = \emptyset$ e questo è aperto.
- Se $A \subseteq Y$ è un aperto contenente y_0, allora $f^{-1}(A) = X$ e questo è nuovamente aperto.

Quindi, la contro-immagine di un insieme aperto è aperta, e questo significa che f è continua.

PROBLEMA 18.)

Ricordo che, rispetto alla distanza discreta su X, ogni sottoinsieme di X è aperto. Quindi, per ogni aperto $A \subseteq Y$, $f^{-1}(A)$ è aperto. Questo significa che f è continua.

PROBLEMA 19.)

Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Dato che l'immagine di ι è Y stesso, e $\iota : Y \longrightarrow Y$ è l'identità, $i^{-1}(A) = A \cap Y$. Ma questo, per definizione, è proprio un aperto per la distanza indotta su X. Questo significa che la controimmagine di un generico aperto è aperta, e quindi ι è continua.

PROBLEMA 20.)

$I : (\mathbb{R}; d_D) \longrightarrow (\mathbb{R}; d_D)$ e $I : (\mathbb{R}; d_D) \longrightarrow (\mathbb{R}; d_E)$ sono continue, per il problema 18.

$I : (\mathbb{R}; d_E) \longrightarrow (\mathbb{R}; d_D)$ non è continua: ad esempio, $\{0\}$ è aperto in $\mathbb{R}$ rispetto alla distanza discreta; tuttavia, $I^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, e $\{0\}$ non è aperto in $\mathbb{R}$ rispetto alla distanza euclidea.

$I : (\mathbb{R}; d_E) \longrightarrow (\mathbb{R}; d_E)$ è continua: se B è aperto in $\mathbb{R}$ rispetto alla distanza euclidea d_E si vede subito che $I^{-1}(B) = B$. Dato che la controimmagine di ogni aperto per la distanza euclidea rispetto ad I è l'aperto stesso, I è continua se sia dominio che codominio hanno la distanza euclidea.

PROBLEMA 21.)

Sia A un aperto in $\mathbb{R}$. Allora, $\pi^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}$. Dimostro che $A \times \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$. Se A è aperto in $\mathbb{R}$ rispetto alla distanza euclidea, allora A è un'unione di una famiglia di bocce, ovvero di intervallini $(x - \delta; x + \delta)$, per ogni $x \in A$. Allora, $A \times \mathbb{R}$ è unione dei rettangolini aperti ("sbucciati")

$$\{(x - \delta; x + \delta) \times (-n; n), \, n \in \mathbb{N}, \, x \in A\}.$$

Ciascuno di essi è unione di bocce euclidee, quindi $A \times \mathbb{R}$ è un aperto euclideo.

$\pi^{-1}(A)$ è aperto, e quindi π è continua.

PROBLEMA 22.)

Sia $g = \frac{d(x;y)}{3}$, e poniamo $B = B_g(x)$; $C = B_g(y)$. Dimostro che $B \cap C = \emptyset$. Infatti, supponiamo per assurdo che esista $z \in B \cap C$. Allora, $d(x; z) < g$ e $d(y; z) < g$, e questo provocherebbe

$$d(x; z) + d(z; y) < g + g = \frac{2}{3} d(x; y),$$

ovvero negherebbe la disuguaglianza triangolare.

PROBLEMA 23.)

Basta prendere la famiglia di bocce $\mathcal{B} = \left\{B_1(x); B_{\frac{1}{2}}(x); B_{\frac{1}{3}}(x); ...; B_{\frac{1}{n}}(x); ...\right\}$.

PROBLEMA 24.)

Sia $\varepsilon > 0$. Sia inoltre L il limite della successione convergente. Allora, se $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, per la definizione di convergenza, a partire da un certo N in poi, $d(x_n; L) < \delta$, per ogni $n > N$. Questo significa che, se $n; m > N$,

$$d(x_n; x_m) \leq d(x_n; L) + d(x_m; L) < \varepsilon.$$

Quindi, i punti della successione si addensano in prossimità del limite, e la successione è di Cauchy.

PROBLEMA 25.)

La successione $\{3; 3.1; 3.14; 3.3.141; 3.1419; 3.14192; 3.141926; ...\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{Q}$, ma converge a π, che non è un elemento di $\mathbb{Q}$. Quindi, rimanendo nell'ambito di $\mathbb{Q}$ trascurando lo spazio ambiente, la successione NON E' CONVERGENTE.

Un altro esempio simile è la successione $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, che è costituita da numeri razionali, ma non tende ad un limite razionale.

PROBLEMA 26.)

In $\mathbb{Z}$, le uniche successioni di Cauchy $\{x_n\}$ sono quelle costanti oppure quelle che diventano costanti a partire da un certo N. Infatti, se si fissa $\varepsilon = 0,5$ o qualsiasi altro numero più piccolo di 1, si ha $d(x_i; x_j) < \varepsilon$ se e solo se $x_i = x_j$, essendo $\{x_n\}$ vincolata a stare in $\mathbb{Z}$. Ma se una successione vale L a partire da un certo N in poi, essa converge ad L. Ne segue che tutte le successioni di Cauchy in $\mathbb{Z}$ convergono, ovvero che $\mathbb{Z}$ è completo.

PROBLEMA 27.)

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy nello spazio metrico discreto $(X; d)$. Se si fissa $\varepsilon < 1$, la condizione di Cauchy significa che $d(x_i; x_j) < \varepsilon$ se e solo se $x_i = x_j$. Dunque, la successione deve assumere costantemente un dato valore L per n sufficientemente grande. Questo L sarà esattamente il limite a cui converge la successione. Dunque, lo spazio metrico è completo.

PROBLEMA 29.)

La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ in $(0; 1)$ è di Cauchy, ma non converge. Infatti, essa convergerebbe a 0, ma 0 non sta in $(0; 1)$.

PROBLEMA 30.)

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $[0; 1]$. Allora, dato che stiamo usando la distanza indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$, $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, e converge dunque ad un limite $L \in \mathbb{R}$. Dimostro che $L \in [0; 1]$.

Supponiamo che, per assurdo, $L \notin [0; 1]$. Allora, dato che $\mathbb{R} \setminus [0; 1]$ è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(L - \varepsilon; L + \varepsilon) \cap [0; 1] = \emptyset$. Ma ciò è impossibile, dato che x_n, per convergere ad L, deve avvicinarsi, per n grande, ad L più di ε. La successione $\{x_n\}$ convergerebbe ad L ma non entrerebbe mai nella boccia centrata in L di raggio ε, e questo sarebbe impossibile.

PROBLEMA 31.)

Per ogni $\varepsilon > 0$, la boccia di centro L e raggio ε contiene tutti gli elementi $\{x_k\}$, per $k > N$ (cioè per k abbastanza grande). Dato che tutta la successione è contenuta in Y, questo significa che $B_\varepsilon(L) \cap Y \neq \emptyset$. Quindi, L è un punto aderente ad Y.

PROBLEMA 32.)

Se $p \in Y$, allora, ovviamente, $p \in \overline{Y}$. $0 \in \overline{Y}$: infatti, $\forall\ \varepsilon > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ (sufficientemente grande) tale che $\frac{1}{n} \in (0 - \varepsilon; 0 + \varepsilon)$. Se $p \notin Y$ e $p \neq 0$, invece, è sempre possibile trovare ε abbastanza piccolo in modo tale che $(p - \varepsilon; p + \varepsilon) \cap Y = \emptyset$. Quindi,

$$\overline{Y} = Y \cup \{0\}.$$

I punti di Y sono "staccati" tra di loro, quindi, per ogni $q \in \mathbb{R}$, $(q - \varepsilon; q + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus Y) \neq \emptyset$. Quindi,

$$\overline{(\mathbb{R} \setminus Y)} = \mathbb{R}.$$

La frontiera di Y è $\overline{Y} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus Y)} = Y \cup \{0\}$.

PROBLEMA 33.)

A e B sono connessi perchè sono connessi per archi.

Passiamo a C: se $F_1 = \mathbb{R} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$, $F_2 = \mathbb{R} \times \left(+\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, F_1 ed F_2 sono aperti per la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$. $F_1 \cap C$ ed $F_2 \cap C$ sono aperti per la distanza indotta su C, e sono non vuoti. Essi sono ovviamenti disgiunti, e $(F_1 \cap C) \cup (F_2 \cap C) = C$. Quindi, C è sconnesso.

Nello stesso modo (e usando gli stessi aperti F_1 ed F_2) si dimostra che D è sconnesso.

B è compatto perchè è chiuso e limitato.

A e C non sono compatti, perchè la successione $\{x_n\}$ data da $x_n = (0; n)$ non ha sottosuccessioni convergenti.

D non è compatto perchè non è chiuso.

PROBLEMA 34.)

$C_1; C_2; C_3$ non sono compatti perchè non sono limitati. C_4 è compatto perchè è chiuso e limitato.

A_2;A_3 e A_4 sono connessi perchè sono connessi per archi (verificarlo con qualche esempio...).

A_1 è sconnesso perchè è unione dei due aperti non vuoti e disgiunti:

$$A_1 = A \cup B,$$

dove $A = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 : w > 0\}$ e $B = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 : w < 0\}$.

PROBLEMA 35.)

Se $(X; d)$ è sconnesso, allora esisono due aperti non vuoti e disgiunti, A e B, la cui unione è X. Se

$$\begin{cases} f(x) = \heartsuit & \text{per} \quad x \in A \\ f(x) = \clubsuit & \text{per} \quad x \in B \end{cases},$$

$f^{-1}(\heartsuit) = A$; $f^{-1}(\clubsuit) = B$, e quindi f è continua.

viceversa, se $f : (X; d) \longrightarrow Y$ è continua, $f^{-1}(\heartsuit) = A$ e $f^{-1}(\clubsuit) = B$ sono due aperti (perchè f è continua), non vuoti (perchè f non è costante) e disgiunti, la cui unione è l'intero insieme di definizione, ovvero X.