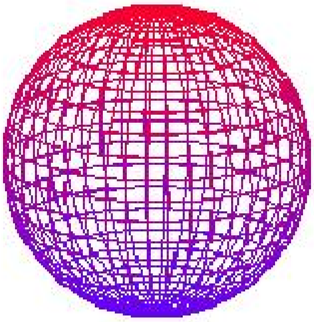
ESERCIZI SULLE SUPERFICI.

1) Calcolare le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana della sfera

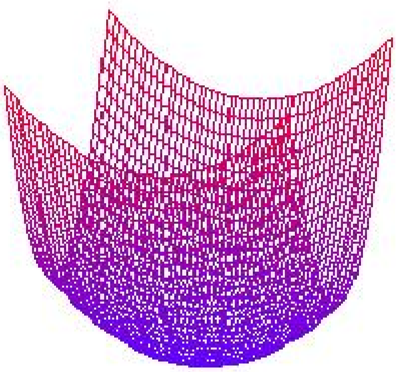
$$\alpha(u;v) = (r \cdot sin(u) \, cos(v); r \cdot sin(u) \, sin(v); r \cdot cos(u)).$$



2.) Dato il paraboloide ellittico

$$\alpha(u;v) = \left(u; v; u^2 + 3v^2\right),$$

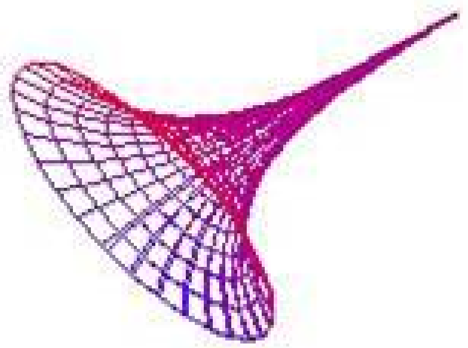
calcolare le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana nell'origine $p = (0,0;0)$.



3.) Si consideri la **pseudosfera**

$$\alpha(u;v) = \left(\int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt; e^{-u} cos(v); e^{-u} sin(v)\right).$$

Dimostrare che essa ha curvatura Gaussiana costante pari a $K = -1$.



4.) **GEODETICHE.** Una curva su S (interamente contenuta in S), $\gamma(s)$, si dice **geodetica** se:

- E' parametrizzata con l'ascissa curvilinea;
- $\overrightarrow{\gamma''(s_0)}$ è **parallelo** alla **normale** $\overrightarrow{N}$ **alla superficie** in ogni punto $\gamma(s_0) \in S$.

Verificare che la curva

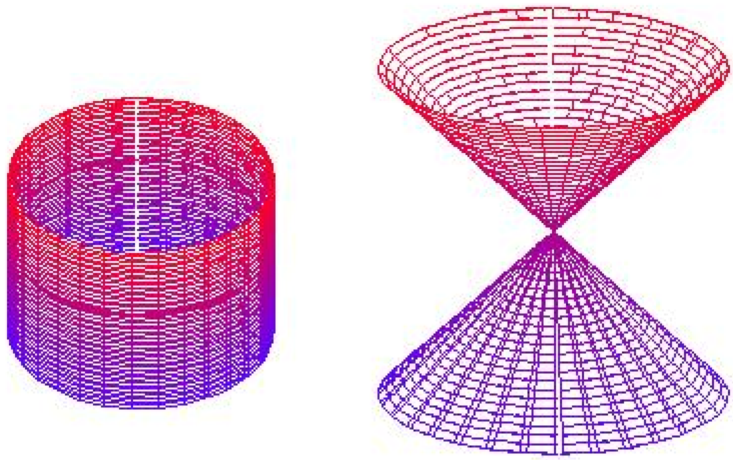
$$\gamma(s) = (cos(s); sin(s); 1)$$

è una geodetica per il cilindro

$$\alpha(u; v) = (cos(u); sin(u); v),$$

ma non per il cono

$$\beta(u; v) = (u \cdot cos(v); u \cdot sin(v); u).$$



5.) Verificare che le eliche

$$\delta_a(s) = \left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); as \right),$$

per ogni numero reale a, sono geodetiche per il cilindro

$$\alpha(u;v) = (cos(u); sin(u); v).$$

6.) Sia data la superficie di rotazione

$$\alpha(u;v) = (f_1(u) \cdot cos(v); f_1(u) \cdot sin(v); f_2(u)),$$

con $\sqrt{(f_1'(u))^2 + (f_2'(u))^2} = 1$ per ogni u, e $f_1;f_2$ funzioni $\mathcal{C}^\infty$, $f_1 > 0$. Dimostrare che il meridiano

$$\gamma(s) = (f_1(s) \cdot cos(v_0); f_1(s) \cdot sin(v_0); f_2(s)),$$

con v_0 angolo fissato, è una geodetica per la superficie α.

7) La **curvatura normale** di una curva $\gamma(s)$ (parametrizzata a velocità unitaria) è il prodotto scalare

$$\kappa_n = \left\langle \overrightarrow{\gamma''(s)}; \overrightarrow{N} \right\rangle,$$

dove $\overrightarrow{N}$ è la normale alla superficie in $\gamma(s)$. La **curvatura geodetica** è

$$\kappa_g = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2}.$$

Dimostrare che una curva geodetica ha curvatura geodetica costantemente nulla (facile!).

8) Sia data la superficie di rotazione

$$\alpha(u;v) = (f_1(u) \cdot cos(v); f_1(u) \cdot sin(v); f_2(u)),$$

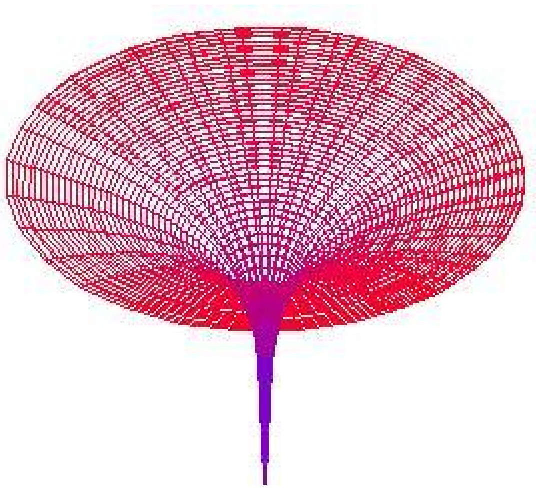
con $\sqrt{(f_1(u))^2 + (f_2(u))^2} = 1$ sempre, e f_1;f_2 funzioni $\mathcal{C}^\infty$, $f_1 > 0$. Dimostrare che il parallelo

$$\gamma(s) = (f_1(u_0) \cdot cos(s); f_1(u_0) \cdot sin(s); f_2(u_0)),$$

con u_0 fissato, ha curvatura geodetica costante nella superficie α.

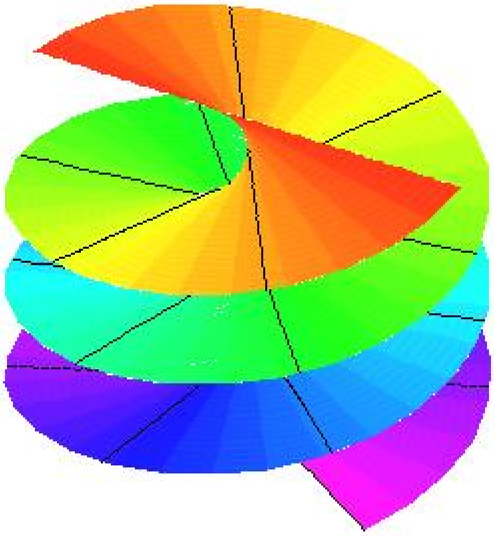
9) Calcolare la curvatura Gaussiana e la matrice dell'applicazione di Weingarten per la superficie

$$\alpha(u;v) = (u \cdot cos(v); u \cdot sin(v); log(u)),\ u > 0.$$



10) Calcolare la curvatura Gaussiana e la matrice dell'applicazione di Weingarten per la superficie

$$\alpha(u;v) = (u \cdot cos(v); u \cdot sin(v); v).$$



11) Sia $f(u;v)$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ a due variabili. Calcolare la matrice della seconda forma fondamentale e la curvatura Gaussiana della superficie

$$\alpha(u;v) = (u;v;f(u;v)),$$

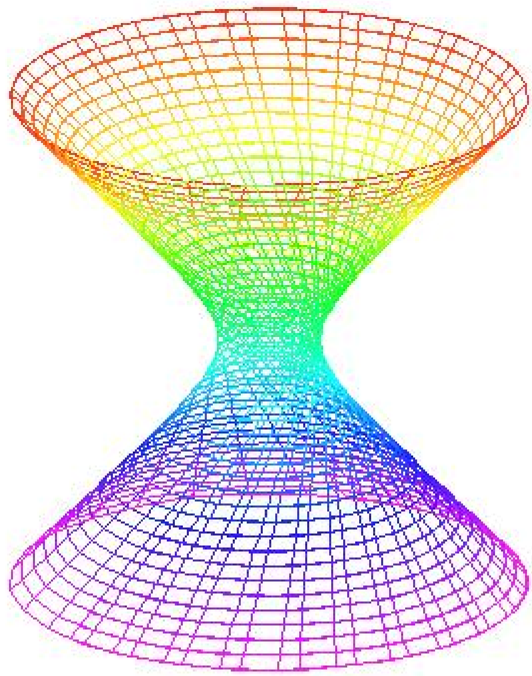
e mettere in relazione il determinante della matrice hessiana di $f(u_0;v_0)$ con l'ellitticità (o l'iperbolicità o la parabolicità) della superficie in $\alpha(u_0;v_0)$.

12) Calcolare le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana in ogni punto p per la superficie (cono):

$$\beta(u;v) = (u \cdot cos(v); u \cdot sin(v); u),\ u > 0.$$

13.) Calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto per la superficie

$$\alpha(u;v) = (cos(u) - v \cdot sin(u); sin(u) + v \cdot cos(u); v).$$



14.) Calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto per la superficie

$$\alpha(u;v) = (u; e^u \cdot cos(v); e^u \cdot sin(v)),$$
$$(u;v) \in \mathbb{R} \times (0;2\pi).$$

SOLUZIONI

PROBLEMA 1.)
$\overrightarrow{\alpha_u}(u;v) = (r \cdot cos(u) cos(v); r \cdot cos(u) sin(v); -r \cdot sin(u));$
$\overrightarrow{\alpha_v}(u;v) = (-r \cdot sin(u) sin(v); r \cdot sin(u) cos(v); 0).$
$\overrightarrow{\alpha_u} \wedge \overrightarrow{\alpha_v} = (r^2 \cdot sin^2(u) cos(v); r^2 \cdot sin^2(u) sin(v); r^2 \cdot sin(u) cos(u));$
$\overrightarrow{N} = (sin(u) cos(v); sin(u) sin(v); cos(u)).$
$\overrightarrow{\alpha_{uu}}(u;v) = (-r \cdot sin(u) cos(v); -r \cdot sin(u) sin(v); -r \cdot cos(u));$
$\overrightarrow{\alpha_{vv}}(u;v) = (-r \cdot sin(u) cos(v); -r \cdot sin(u) sin(v); 0);$
$\overrightarrow{\alpha_{uv}}(u;v) = (-r \cdot cos(u) sin(v); r \cdot cos(u) cos(v); 0).$
$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cdot sin^2(u) \end{pmatrix};$
$B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \cdot sin^2(u) \end{pmatrix}.$
$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$
$H = \dfrac{1}{r}.$

$K = \dfrac{det\,(B)}{det\,(G)} = \dfrac{1}{r^2}$.
$k_1 = k_2 = \dfrac{1}{r}$.
PROBLEMA 2.)
$\overrightarrow{\alpha_u}\,(u; v) = (1; 0; 2u)$;
$\overrightarrow{\alpha_v}\,(u; v) = (0; 1; 6v)$;
$\overrightarrow{\alpha_u} \wedge \overrightarrow{\alpha_v} = (-2u; -6v; 1)$.

$\overrightarrow{N} = \dfrac{(-2u; -6v; 1)}{\sqrt{4u^2 + 36v^2 + 1}}$.
$\overrightarrow{\alpha_{uu}}\,(u; v) = (0; 0; 2)$;
$\overrightarrow{\alpha_{uv}}\,(u; v) = (0; 0; 0)$;
$\overrightarrow{\alpha_{vv}}\,(u; v) = (0; 0; 6)$.
$G = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 12uv \\ 12uv & 1 + 36v^2 \end{pmatrix}$.
$B = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{4u^2+36v^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{4u^2+36v^2+1}} \end{pmatrix}$.
Nel punto $P = (0; 0; 0) = \alpha\,(0; 0)$,
$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ e $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.
$k_1 = -6$;
$k_2 = -2$
$H = -4$;
$K = 12$.
PROBLEMA 3.)
Ricordarsi che la prima componente è definita tramite un integrale, e il parametro u è un estremo di integrazione. Si ha:

$$\int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}dt = -\sqrt{(1 - e^{-2u})} + arctanh\left(\sqrt{(1 - e^{-2u})}\right),$$

ma si può anche procedere (molto) più velocemente ricordando che la derivata prima di una funzione integrale è semplicemente l'integrando (valutato nel punto). Quindi,

$$\overrightarrow{\alpha_u\,(u; v)} = \left(\sqrt{(1 - e^{-2u})}; -e^{-u}cos\,(v)\,; -e^{-u}sin\,(v)\right),$$
$$\overrightarrow{\alpha_v\,(u; v)} = \left(0; -e^{-u}sin\,(v)\,; e^{-u}cos\,(v)\right).$$

Calcolando poi $K = \dfrac{det\,(B)}{det\,(G)}$, si vede che $K = 1$ costantemente (si noti in più che la parametrizzazione è definita solo per $u > 0$).

PROBLEMA 4.)

$\overrightarrow{\gamma''\,(s)} = (-cos\,(s)\,; -sin\,(s)\,; 0)$. Il campo di vettori normale al cilindro è:

$$\overrightarrow{N_\alpha} = (cos\,(u)\,; sin\,(u)\,; 0).$$

Nel punto $\gamma\,(s) = \alpha\,(s; 1)$ (si noti che lo **stesso** punto è visto sotto due differenti aspetti: come punto della curva γ e come punto della superficie S), si ha

$$\overrightarrow{N_\alpha\,(\gamma\,(s))} = (-cos\,(s)\,; -sin\,(s)\,; 0),$$

che è parallelo a $\overrightarrow{\gamma''\,(s)}$. Poichè questo è vero in generale (s può assumere qualsiasi valore senza che la proprietà di parallelismo sia alterata), e, inoltre, si vede subito che $\gamma\,(s)$ è parametrizzata a velocità unitaria, γ è una geodetica per il cilindro.

l campo di vettori normale al cono è:

$$\overrightarrow{N_\beta} = \left(-\frac{cos\,(u)}{\sqrt{2}}; -\frac{sin\,(u)}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Nel punto $\gamma\,(s) = \beta\,(1; s)$, si ha

$$\overrightarrow{N_\beta\,(\gamma\,(s))} = \left(-\frac{cos\,(s)}{\sqrt{2}}; -\frac{sin\,(s)}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

che non è parallelo a $\overrightarrow{\gamma''\,(s)}$.

PROBLEMA 5.)

δ_a è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Inoltre,

$$\overrightarrow{\delta_a''\,(s)} = \left(-\frac{1}{1+a^2}cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); -\frac{1}{1+a^2}sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); 0\right).$$

Il campo di vettori normale al cilindro è:

$$\overrightarrow{N_\alpha} = (cos\,(u)\,; sin\,(u)\,; 0).$$

Nel punto $\delta_a\,(s) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}; as\right)$, si ha

$$\overrightarrow{N_\alpha(\gamma(s))} = \left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); 0\right),$$

che è parallelo a $\overrightarrow{\delta''_a(s)}$, qualunque sia il valore di $a \in \mathbb{R}$. In particolare, per $a = 0$, ritorniamo nel caso dell'esercizio precedente.

PROBLEMA 6.)

$\gamma(s) = (f_1(s) \cdot cos(v_0); f_1(s) \cdot sin(v_0); f_2(s))$,

$\gamma'(s) = (f'_1(s) \cdot cos(v_0); f'_1(s) \cdot sin(v_0); f'_2(s))$,

$\gamma''(s) = (f''_1(s) \cdot cos(v_0); f''_1(s) \cdot sin(v_0); f''_2(s))$.

$\overrightarrow{\alpha_u}(u; v) = (f'_1(u) \cdot cos(v); f'_1(u) \cdot sin(v); f'_2(u))$;

$\overrightarrow{\alpha_v}(u; v) = (-f_1(u) \cdot sin(v); f_1(u) \cdot cos(v); 0)$;

Nel punto $\gamma(s) = \alpha(s; v_0)$, si ha:

$\gamma''(s) = (f''_1(s) \cdot cos(v_0); f''_1(s) \cdot sin(v_0); f''_2(s))$ e

$\overrightarrow{\alpha_u}(s; v_0) = (f'_1(s) \cdot cos(v_0); f'_1(s) \cdot sin(v_0); f'_2(s))$.

$\langle \gamma''; \overrightarrow{\alpha_u} \rangle = f'_1(s) f''_1(s) + f'_2(s) f''_2(s)$.

D'altra parte, per ipotesi, $(f'_1(u))^2 + (f'_2(u))^2 = 1$, e, derivando questa relazione,

$2f'_1(u) f''_1(u) + 2f'_2(u) f''_2(u) = 0$. A meno di cambiare il nome della variabile (s o u) si vede che

$\langle \gamma''; \overrightarrow{\alpha_u} \rangle = 0$.

$\langle \gamma''; \overrightarrow{\alpha_v} \rangle (s; v_0) =$

$= -f_1(s) f''_1(s) \cdot sin(v_0) cos(v_0) + f_1(s) f''_1(s) \cdot sin(v_0) cos(v_0) = 0$.

γ'' è perpendicolare a $\overrightarrow{\alpha_u}$ e ad $\overrightarrow{\alpha_v}$ in ogni punto della curva, dunque deve essere sempre parallelo al vettore normale.

$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{(f'_1(s))^2 + (f'_2(s))^2} = 1$, quindi γ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Allora, il meridiano γ è una geodetica per la superficie di rotazione.

PROBLEMA 7.)

Per una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, sappiamo che $\overrightarrow{T}(s) = \gamma'(s)$ e che $\overrightarrow{T}'(s) = \kappa(s) \overrightarrow{N_\gamma}(s)$, dove

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|.$$

$\overrightarrow{N_\gamma}(s)$ è il vettore normale alla curva.

A questo punto, se $\gamma''(s)$ è parallelo alla normale $\overrightarrow{N}$ alla superficie (che ha lunghezza costante 1),

$$\left|\left\langle \gamma''(s); \overrightarrow{N} \right\rangle\right| = \|\gamma''(s)\| = \kappa(s).$$

Pertanto, $|\kappa_n(s)| = \kappa(s)$, e così la curva ha $\kappa_g = 0$ identicamente.

PROBLEMA 8.)

$\overrightarrow{\alpha_u}(u;v) = (f_1'(u) \cdot cos(v); f_1'(u) \cdot sin(v); f_2'(u))$;

$\overrightarrow{\alpha_v}(u;v) = (-f_1(u) \cdot sin(v); f_1(u) \cdot cos(v); 0)$;

$\overrightarrow{N}(u;v) = \dfrac{(-f_1(u) f_2'(u) \cdot cos(v); -f_1(u) f_2'(u) \cdot sin(v); f_1(u) f_1'(u))}{\sqrt{f_1(u)^2 \left((f_1'(s))^2 + (f_2'(s))^2\right)}} =$

$(-f_2'(u) \cdot cos(v); -f_2'(u) \cdot sin(v); f_1'(u))$.

$\gamma''(s) = (-f_1(u_0) \cdot cos(s); -f_1(u_0) \cdot sin(s); 0)$.

$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = f_1(u_0)$, che è costante.

Nel punto $\gamma(s) = \alpha(u_0; s)$, si ha:

$$\overrightarrow{N}(u_0; s) = (-f_2'(u_0) \cdot cos(s); -f_2'(u_0) \cdot sin(s); f_1'(u_0));$$
$$\gamma''(s) = (-f_1(u_0) \cdot cos(s); -f_1(u_0) \cdot sin(s); 0).$$
$$\left\langle \gamma''(s); \overrightarrow{N}(u_0; s) \right\rangle = (f_1(u_0))(f_2'(u_0)).$$

Anche la curvatura normale è costante, dunque è costante pure la curvatura geodetica:

$$\kappa_g = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2} = \sqrt{(f_1(u_0))^2 - (f_1(u_0))^2 (f_2'(u_0))^2} =$$
$$= (f_1(u_0)) \sqrt{1 - (f_2'(u_0))^2} = (f_1(u_0))(f_1'(u_0)).$$

PROBLEMA 9.)

$\overrightarrow{\alpha_u}(u;v) = \left(cos(v); sin(v); \frac{1}{u}\right)$

$\overrightarrow{\alpha_v}(u;v) = (-u \cdot sin(v); u \cdot cos(v); 0)$.

$(\overrightarrow{\alpha_u} \wedge \overrightarrow{\alpha_v})(u;v) = (-cos(v); -sin(v); u)$;

$\overrightarrow{N}(u;v) = \dfrac{(-cos(v); -sin(v); u)}{\sqrt{1+u^2}}$.

$\overrightarrow{\alpha_{uu}}(u;v) = \left(0; 0; -\dfrac{1}{u^2}\right)$;

$\overrightarrow{\alpha_{uv}}(u;v) = (-sin(v); cos(v); 0)$;

$\overrightarrow{\alpha_{vv}}(u;v) = (-u \cdot cos(v); -u \cdot sin(v); 0)$.

$G = \begin{pmatrix} \frac{1+u^2}{u^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix}$.

$L = G^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{u\sqrt{u^2+1}} \end{pmatrix}$

$K\left(u;v\right)=\dfrac{-1}{\left(u^2+1\right)^2}.$

PROBLEMA 10.)

$\overrightarrow{\alpha_u}\left(u;v\right)=\left(cos\left(v\right);sin\left(v\right);0\right);$

$\overrightarrow{\alpha_v}\left(u;v\right)=\left(-u\cdot sin\left(v\right);u\cdot cos\left(v\right);1\right);$

$\overrightarrow{N}\left(u;v\right)=\dfrac{\left(sin\left(v\right);-cos\left(v\right);u\right)}{\sqrt{1+u^2}}.$

$\overrightarrow{\alpha_{uu}}\left(u;v\right)=\left(0;0;0\right);$

$\overrightarrow{\alpha_{uv}}\left(u;v\right)=\left(-sin\left(v\right);cos\left(v\right);0\right);$

$\overrightarrow{\alpha_{vv}}\left(u;v\right)=\left(-u\cdot cos\left(v\right);-u\cdot sin\left(v\right);0\right).$

$G=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+u^2\end{pmatrix}.$

$B=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0\end{pmatrix}.$

$K\left(u;v\right)=\dfrac{-1}{\left(u^2+1\right)^2}.$

$L=G^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{\left(u^2+1\right)^3}} & 0\end{pmatrix}.$

PROBLEMA 11.)

$\overrightarrow{\alpha_u}\left(u;v\right)=\left(1;0;\frac{\partial f}{\partial u}\left(u;v\right)\right);$

$\overrightarrow{\alpha_v}\left(u;v\right)=\left(0;1;\frac{\partial f}{\partial v}\left(u;v\right)\right).$

$\overrightarrow{N}\left(u;v\right)=\dfrac{\left(-\frac{\partial f}{\partial u};-\frac{\partial f}{\partial v};1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}.$

$\overrightarrow{\alpha_{uu}}\left(u;v\right)=\left(0;0;\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right);$

$\overrightarrow{\alpha_{uv}}\left(u;v\right)=\left(0;0;\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right);$

$\overrightarrow{\alpha_{vv}}\left(u;v\right)=\left(0;0;\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$

$G=\begin{pmatrix}1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 & \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) & 1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\end{pmatrix}.$

$B=\begin{pmatrix}-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} & -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}\\ -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} & -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}\end{pmatrix}.$

$L=G^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{u}{\left(u^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} & 0\\ 0 & \frac{-1}{u^2\sqrt{u^2+1}}\end{pmatrix}$

$det\,(G) = 1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2;$

$det\,(B) = \dfrac{det\,(Hess\,(f))}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}.$

$K = \dfrac{det\,(Hess\,(f))}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)^2}.$

Quindi, il punto $\alpha\,(u_0; v_0)$ è ellittico se $det\,(Hess\,(f)) > 0$ in $(u_0; v_0)$; $\alpha\,(u_0; v_0)$ è parabolico se $det\,(Hess\,(f)) = 0$ in $(u_0; v_0)$; $\alpha\,(u_0; v_0)$ è iperbolico se $det\,(Hess\,(f)) < 0$ in $(u_0; v_0)$.

PROBLEMA 12.)

$\overrightarrow{\beta_u}\,(u; v) = (cos\,(v)\,; sin\,(v)\,; 1);$

$\overrightarrow{\beta_v}\,(u; v) = (-u \cdot sin\,(v)\,; u \cdot cos\,(v)\,; 0).$

$\overrightarrow{\beta_u} \wedge \overrightarrow{\beta_v}\,(u; v) = (-u \cdot cos\,(v)\,; -u \cdot sin\,(v)\,; u);$

$\overrightarrow{N}\,(u; v) = \dfrac{(-cos\,(v)\,; -sin\,(v)\,; 1)}{\sqrt{2}}.$

$\overrightarrow{\beta_{uu}}\,(u; v) = (0; 0; 0);$

$\overrightarrow{\beta_{uv}}\,(u; v) = (-sin\,(v)\,; cos\,(v)\,; 0);$

$\overrightarrow{\beta_{vv}}\,(u; v) = (-cos\,(v)\,; -sin\,(v)\,; 0).$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$

$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u^2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

$k_1 = 0;$

$k_2 = -\dfrac{1}{u^2\sqrt{2}};$

la curvatura Gaussiana è:

$K = 0.$

$H = -\frac{1}{u^2 2\sqrt{2}}.$

PROBLEMA 13.)

$\overrightarrow{\alpha_u}\,(u; v) = (-sin\,(u) - v \cdot cos\,(u)\,; cos\,(u) - v \cdot sin\,(u)\,; 0);$

$\overrightarrow{\alpha_v}\,(u; v) = (-sin\,(u)\,; cos\,(u)\,; 1);$

$\overrightarrow{N}\,(u; v) = \dfrac{(cos\,(u) - v \cdot sin\,(u)\,; sin\,(u) + v \cdot cos\,(u)\,; -v)}{\sqrt{1 + 2v^2}}.$

$\overrightarrow{\alpha_{uu}}\,(u; v) = (-cos\,(u) + v \cdot sin\,(u)\,; -sin\,(u) - v \cdot cos\,(u)\,; 0);$

$\overrightarrow{\alpha_{uv}}\,(u; v) = (-cos\,(u)\,; -sin\,(u)\,; 0);$

$\overrightarrow{\alpha_{vv}}\,(u; v) = (0; 0; 0).$

$G = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

$B = \begin{pmatrix} \frac{1+v^2}{\sqrt{1+2v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}} & 0 \end{pmatrix}.$

$K(u;v) = \dfrac{-1}{(2v^2+1)^2}$. Si osservi che tutti i punti della superficie sono iperbolici.

PROBLEMA 14.)

$(u; e^u \cdot cos(v); e^u \cdot sin(v))$

$\overrightarrow{\alpha_u}(u;v) = (1; e^u \cdot cos(v); e^u \cdot sin(v))$;

$\overrightarrow{\alpha_v}(u;v) = (0; -e^u \cdot sin(v); e^u \cdot cos(v))$;

$\overrightarrow{N}(u;v) = \dfrac{(e^u; -cos(v); -sin(v))}{\sqrt{1+e^{2u}}}$.

$\overrightarrow{\alpha_{uu}}(u;v) = (0; e^u \cdot cos(v); e^u \cdot sin(v))$;

$\overrightarrow{\alpha_{uv}}(u;v) = (0; -e^u \cdot sin(v); e^u \cdot cos(v))$;

$\overrightarrow{\alpha_{vv}}(u;v) = (0; -e^u \cdot cos(v); -e^u \cdot sin(v))$.

$G = \begin{pmatrix} 1+e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix}.$

$B = \begin{pmatrix} \frac{e^u}{\sqrt{1+e^{2u}}} & 0 \\ 0 & -\frac{e^u}{\sqrt{1+e^{2u}}} \end{pmatrix}.$

$K(u;v) = \dfrac{-1}{(1+e^{2u})^2}$. Si osservi che anche in questo caso tutti i punti della superficie sono iperbolici. Infatti, questa superficie è solo un modo differente per parametrizzare la pseudo-sfera.