MATRICI NORMALI.

May 11, 2006

Abstract

In questa sezione si dimostra il teorema spettrale nel caso complesso. Tale teorema e' di fondamentale importanza nella teoria dell'algebra lineare e per le sue applicazioni allo studio della geometria reale e complessa. Il fatto che ogni matrice normale (e quindi, in particolare, le matrici simmetriche, ortogonali, hermitiane e unitarie) possano essere diagonalizzate mediante una matrice unitaria viene sfruttato in moltissimi ambiti, quali la geometria algebrica (studio di coniche, quadriche, cubiche, quartiche, ecc...); in geometria differenziale e in fisica teorica (in particolare, in meccanica quantististica sono oggetto di studio gli operatori hermitiani). Il caso reale verra' solo marginalmente affrontato, e ci limiteremo a dimostrare che tutte le matrici reali simmetriche (e, piu' generalmente, tutte le matrici complesse hermitiane) ammettono solo autovalori reali.

1 Richiami.

- Sia $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ il prodotto standard su $\mathbb{C}^n$. Allora, una matrice viene spostata dalla prima alla seconda componente per aggiunzione:

$$\langle A\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{v}; A^*\overrightarrow{w}\rangle.$$

- Una matrice si dice **normale** se commuta con la sua aggiunta:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A.$$

- Esempi di matrici normali sono: le matrici unitarie (infatti, dato che $A^* = A^{-1}$, si ha $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$); le matrici reali ortogonali (infatti, dato che $A^* = {}^tA = A^{-1}$, si ha $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$); le matrici Hermitiane (infatti, dato che $A^* = A$, si ha $A \cdot A^* = A^* \cdot A = A^2$); le matrici reali simmetriche (infatti, dato che $A^* = {}^tA = A$, si ha $A \cdot A^* = A^* \cdot A = A^2$).

- NOTA BENE: gli esempi del punto precedente sono i piu' significativi, ma non esauriscono completamente l'insieme delle matrici normali, che e' **molto** piu' ampio.

2 Il teorema spettrale.

Partiamo dai due seguenti semplici lemmi.

LEMMA 1

Ogni applicazione lineare f definita su un sottospazio complesso U di $\mathbb{C}^n$ a valori in U stesso ha sicuramente un autovettore.

Dim.) Infatti, se U ha dimensione r e si scrive la matrice della restrizione di f a U di rispetto a una qualsiasi base di f si trova una matrice $r \times r$. Questa ha almeno un autovalore complesso, e, conseguentemente, ha almeno un autovettore. ■

LEMMA 2

Siano A e B due matrici complesse $n \times n$ tali che $AB = BA$. Allora, esiste un elemento non nullo di $\mathbb{C}^n$ che sia autovettore sia per A che per B.

Dim.) Sia λ un autovalore di A, e sia V_λ il corrispondente autospazio. Se $\overrightarrow{v} \in V_\lambda$,

$$A(B(\overrightarrow{v})) = B(A(\overrightarrow{v})) = B(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda B(\overrightarrow{v}).$$

Quindi, $B(\overrightarrow{v}) \in V_\lambda$. B e' un'applicazione lineare di V_λ in se stesso. Per il lemma precedente, questa ha almeno un autovettore $\overrightarrow{w} \in V_\lambda$. Abbiamo concluso: $\overrightarrow{w}$ sta in V_λ, dunque e' un autovettore di A, e $\overrightarrow{w}$ e' anche autovettore di B. ■

TEOREMA SPETTRALE

Sia $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ il prodotto Hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$, e sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice normale. Allora, esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di A.

Dim.) Procediamo per induzione sulla dimensione n.

BASE: Il teorema è ovvio per $n = 1$ (A è una matrice 1×1).

PASSO: Dobbiamo dimostrare il teorema spettrale in dimensione n, supponendo che esso sia vero in dimensione $n-1$. Poichè A commuta con A^*, A e A^* hanno almeno un autovettore in comune: indichiamolo con $\overrightarrow{v_1}$. Dividendolo per la sua lunghezza, potremo supporre che $\overrightarrow{v_1}$ abbia lunghezza 1. Ora, siano $V_1 = \mathit{span}\,\{\overrightarrow{v_1}\}$, e $W = (V_1)^\perp$. A manda W in sè stesso: se $\overrightarrow{w} \in W$,

$$\langle A\overrightarrow{w};\overrightarrow{v_1}\rangle = \langle \overrightarrow{w};A^*\overrightarrow{v_1}\rangle = \mu\,\langle \overrightarrow{w};\overrightarrow{v_1}\rangle = 0.$$

La penultima uguaglianza si ottiene ricordando che $\overrightarrow{v_1}$ è un autovettore anche per A^* (ho chiamato con μ l'autovalore associato). L'ultima uguaglianza si ottiene ricordando che $\overrightarrow{w} \in W = (V_1)^{\perp}$. Dunque, $A\overrightarrow{w}$ è ortogonale a $\overrightarrow{v_1}$, e cioè $A\overrightarrow{w} \in W$. A può essere vista come un'applicazione lineare di W in sè stesso. Ma W ha dimensione $n-1$, dunque si può applicare l'ipotesi induttiva. Sia $\{\overrightarrow{v_2};...;\overrightarrow{v_n}\}$ la base ortonormale di W. Allora, essendo $\overrightarrow{v_1}$ ortogonale ad ogni vettore di W, $\{\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};...;\overrightarrow{v_n}\}$ è la base cercata di $\mathbb{C}^n$. $\blacksquare$

Dunque, abbiamo verificato che tutte le matrici **complesse** normali possono essere diagonalizzate in $\mathbb{C}$ con una base ortonormale di autovettori. Tuttavia, questo non si verifica nel caso **reale**. Infatti, una matrice normale reale può avere autovalori immaginari, e quindi non essere diagonalizzabile in campo reale (pur rimanendo diagonalizzabile in campo complesso).

Tale cosa non si verifica per le matrici simmetriche: il seguente teorema, valido per le matrici **hermitiane**, è vero in particolare per tutte le matrici simmetriche, e afferma che esse possono avere solo autovalori reali.

TEOREMA

Sia A una matrice hermitiana complessa $n \times n$. Allora, ogni autovalore di A è reale.

Dim. (facile)*)* Sia λ un autovalore di A, con un autovettore associato $\overrightarrow{v}$, e sia $\langle\cdot;\cdot\rangle$ il prodotto hermitiano standard. Allora,

$$\langle A\overrightarrow{v};\overrightarrow{v}\rangle = \langle \lambda\overrightarrow{v};\overrightarrow{v}\rangle = \lambda\,\langle \overrightarrow{v};\overrightarrow{v}\rangle.$$

D'altra parte, $A^* = A$, per ipotesi, e così $\langle A\overrightarrow{v};\overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{v};A^*\overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{v};A\overrightarrow{v}\rangle$.

Ma,

$$\langle A\overrightarrow{v};\overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{v};\lambda\overrightarrow{v}\rangle = \overline{\lambda}\,\langle \overrightarrow{v};\overrightarrow{v}\rangle.$$

Dunque, $\overline{\lambda} = \lambda$, e λ è reale. $\blacksquare$

ESERCIZI.

1.) Trovare dei numeri reali $x;y;z$ tali che A sia hermitiana:

$$A = \begin{pmatrix} x+iy & 3 \\ 3+zi & 0 \end{pmatrix}.$$

2.) Trovare dei numeri reali $x; y; z$ tali che A sia hermitiana:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x+2i & yi \\ 3-2i & 0 & 1+zi \\ yi & 1-xi & -1 \end{pmatrix}.$$

3.) Dire se la seguente matrice è normale:

$$A = \begin{pmatrix} 3+4i & 1 \\ i & 2+3i \end{pmatrix}.$$

4.) Dire se la seguente matrice è normale:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & i \end{pmatrix}.$$

5.) Dire se la seguente matrice è normale:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

6.) Dire se la seguente matrice è normale:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1-2i & 4+7i \\ 1+2i & -4 & -2i \\ 4-7i & 2i & 2 \end{pmatrix}.$$

7.) Dire se la seguente matrice è normale:

$$C = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix}.$$

8.) Siano A una matrice normale, e U una matrice unitaria. Dimostrare che U^*AU è ancora una matrice unitaria.

SOLUZIONI.

1.) x qualsiasi, $y = 0$, $z = 0$.
2.) $x = 3$; $y = 0$; $z = 3$.
3.) Sì.
4.) No.
5.) Sì, perchè A è unitaria.
6.) Sì, perchè B è hermitiana.
7.) Sì.
8.) $(U^*AU)^* (U^*AU) = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU$, perchè U è unitaria.

$(U^*AU) (U^*AU)^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U = U^*A^*AU$, perchè U è unitaria e A è normale.

Allora, $(U^*AU)^* (U^*AU) = (U^*AU) (U^*AU)^*$.