Esercizi laboratorio di Geometria 1A

1) Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti:

$v_1 = (1; 3; -1; 4)$,
$v_2 = (3; 8; -5; 7)$,
$v_3 = (2; 9; 4; 23)$.

2) Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti:

$v_1 = (1; -2; 4; 1)$,
$v_2 = (2; 1; 0; -3)$,
$v_3 = (3; -6; 1; 4)$.

3) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 su $\mathbb{R}$. Decidere se i seguenti polinomi sono linearmente indipendenti:

$u(t) = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$;
$v(t) = t^3 + 2t^2 + 4t - 1$;
$w(t) = 2t^3 - t^2 - 3t + 5$.

4) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 su $\mathbb{R}$. Decidere se i seguenti polinomi sono linearmente indipendenti:

$u(t) = t^3 - 5t^2 - 2t + 3$;
$v(t) = t^3 - 4t^2 - 3t + 4$;
$w(t) = 2t^3 - 7t^2 - 7t + 9$.

5) Dire se il seguente vettore v sta nello spazio $Span(v_1; v_2; v_3)$ generato dai vettori v_1;v_2;v_3, dove

$v = (3; -7; 3; 8; -1)$;
$v_1 = (1; -2; 1; 3; -1)$;
$v_2 = (-2; 4; -2; -6; 2)$;
$v_3 = (1; -3; 1; 2; 1)$.

6) Dire se il seguente vettore v sta nello spazio $Span(v_1; v_2; v_3)$ generato dai vettori v_1;v_2;v_3, dove

$v = (1; 2; 1; 1; 1)$;
$v_1 = (1; 0; 1; 0; 1)$;
$v_2 = (1; 1; 2; 1; 0)$;
$v_3 = (1; 2; 3; 1; 1)$.

7) Dire se il seguente vettore v sta nello spazio $Span(v_1; v_2; v_3)$ generato dai vettori v_1;v_2;v_3, dove

$v = (4; 2; 5; 4; 6)$;
$v_1 = (1; 0; 1; 1; 1)$;
$v_2 = (2; 1; 2; 0; 1)$;
$v_3 = (1; 1; 2; 3; 4)$.

8) Considero il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ costituito dai vettori $(x; y; z)$ di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$x + 2y - z = 0.$$

Trovare una base e la dimensione di tale sottospazio.

9) In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $v_1 = (1; 1; 2)$; $v_2 = (2; -1; 3)$ e $v_3 = (3; 0; h)$. Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori sono linearmente dipendenti.

10) In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $v_1 = (1; 3; 2)$; $v_2 = (-2; 1; 1)$. Scrivere le componenti di $v = (7; 0; -1)$ rispetto a v_1 e v_2 e verificare che $Span(v_1; v_2)$ ha dimansione 2.

11) Considero il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori $(x; y; z; w)$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ 2x + y + z - 2w = 0 \end{cases}.$$

Trovare una base e la dimensione di tale sottospazio.

12) Considero il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori $(x; y; z; w)$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3t = 0 \\ 2x + 4y + 4z - t = 0 \\ 3x + 6y + 7z + t = 0 \end{cases}.$$

Trovare una base e la dimensione di tale sottospazio.

13) Considero il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ costituito dai vettori $(x; y; z)$ di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Trovare una base e la dimensione di tale sottospazio.

14) Considero il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori $(x;y;z;w)$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ x & + & y & & & - & w & = & 0 \end{array}\right. .$$

Trovare una base e la dimensione di tale sottospazio.

Soluzioni

1) I vettori sono linearmente dipendenti.
2) I vettori sono linearmente indipendenti.
3) I polinomi sono linearmente indipendenti.
4) I polinomi sono linearmente dipendenti.
5) $v \in Span(v_1;v_2;v_3)$.
6) $v \notin Span(v_1;v_2;v_3)$.
7) $v \in Span(v_1;v_2;v_3)$.
8) dim(W)=2. Base di W:$\{(1;0;1)\,;(0;2;1)\}$.
9) $h = 5$.
10) $v = 1 \cdot v_1 - 3 \cdot v_2$.
11) dim(W)=2. Base di W:$\left\{(-1;1;1;0)\,;\left(\frac{5}{3};-\frac{4}{3};0;1\right)\right\}$.
12) dim(W)=2. Base di W: $\left\{\left(\frac{11}{2};0;-\frac{5}{2};1\right);(-2;1;0;0)\right\}$.
13) $W = \{(0;0;0)\}$.
14) dim(W)=2. Base di W:$\{(1;0;-2;1)\,;(0;1;1;1)\}$.