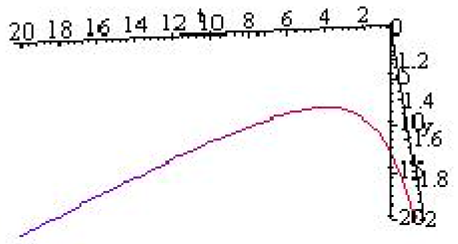
Esercizi sulle curve.

1.) Trovare curvatura e torsione della curva:

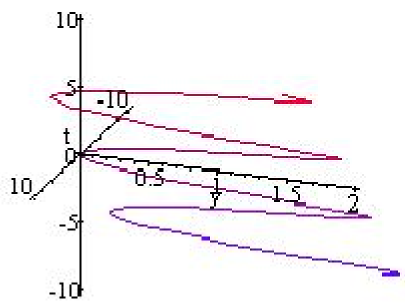
$$\alpha(t) = \left(t; \frac{1+t}{t}; \frac{1-t^2}{t}\right),\ t \in [1; 10].$$

Verificare che la curva è piana, e scrivere l'equazione di tale piano.



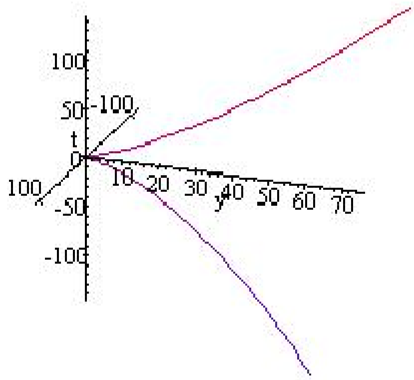
2.) Trovare curvatura e torsione della curva:

$$\beta(t) = (t - sin(t); 1 - cos(t); t);\ t \in [0; 5].$$



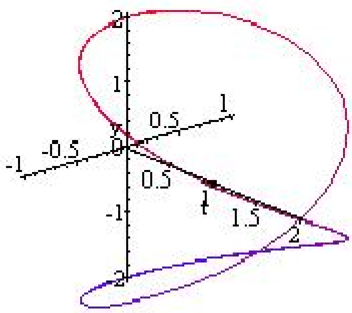
3.) Trovare curvatura e torsione della curva:

$$\gamma(t) = \left(3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3\right);\ t \in [-5; 5].$$



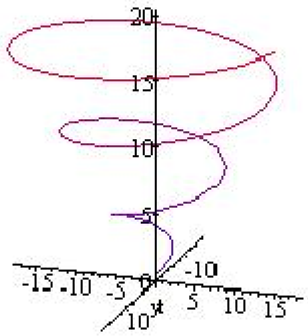
4.) Trovare curvatura e torsione della curva:

$$\delta(t) = \left(1 + cos(t); sin(t); 2\left(sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\right);\ t \in [0; 2\pi].$$



5.) Trovare curvatura e torsione della curva:

$$\zeta(t) = (t(cos(t)); t(sin(t)); t);\ t \in [0; 5].$$



6.) Sia $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare, avente vettore tangente $\overrightarrow{T}$ e curvatura κ, parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

Sia $\delta : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\delta(s) = \gamma(1-s)$. Siano $\overrightarrow{T_1}(s)$ e $\kappa_1(s)$, rispettivamente, il vettore tangente e la curvatura di δ.Verificare che γ e δ hanno la stessa lunghezza.

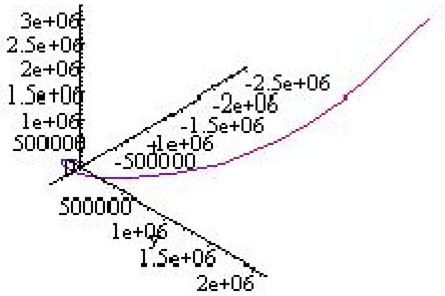
7.) Verificare che, date γ e δ come nel problema precedente, $\overrightarrow{T}(s) = -\overrightarrow{T_1}(1-s)$ e $\kappa(s) = \kappa_1(1-s)$, $\forall s \in [0;1]$

8.) Sia $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana, parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Dimostrare che, se γ ha curvatura costante e non nulla, allora γ è contenuta in un pezzo di circonferenza.

9.) Sia $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare, parametrizzata con l'ascissa curvilinea, vincolata a stare sulla superficie sferica $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Verificare che la curvatura di γ è maggiore di $\frac{1}{r}$.

10.) Trovare curvatura e torsione della curva:

$$\eta(t) = \left(e^t\left(cos(t)\right); e^t\left(sin(t)\right); e^t\right);\ t \in [-5;5].$$



11.) Sia $\gamma : [p;q] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva contenuta in un piano passante per l'origine. Verificare che $\overrightarrow{\gamma'(t)}$; $\overrightarrow{\gamma''(t)}$ e $\overrightarrow{\gamma(t)}$ sono linearmente dipendenti, come vettori in $\mathbb{R}^3$.

12.) Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (3t^2; 1+3t; at^3)$, $t \in [-5;5]$,

- Stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è contenuta in un piano.
- Posto $a = 2$, calcolare la terna di Frenet-Serre, curvatura e torsione.
- Posto $a = 2$, calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra $A = (0;1;0)$ e $B = (3;-2;-2)$.

13.) Data la curva nello spazio $\beta(t) = (cos(t); sin(t); cos(at))$, $t \in [-5;5]$, stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Posto $a = 2$, trovare la curvatura e la torsione per $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Soluzioni.

PROBLEMA 1.)
$\alpha'(t) = \left(1; -\frac{1}{t^2}; -1 - \frac{1}{t^2}\right)$; $\alpha''(t) = \left(0; \frac{2}{t^3}; \frac{2}{t^3}\right)$;
$\alpha'''(t) = \left(0; -\frac{6}{t^4}; -\frac{6}{t^4}\right)$; $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + \frac{2}{t^4} + \frac{2}{t^2}}$
$(\alpha' \wedge \alpha'')(t) = \frac{2}{t^3}(1; -1; 1)$; $\|(\alpha' \wedge \alpha'')(t)\| = \frac{2\sqrt{3}}{t^3}$.
Quindi,
$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\left(1; -\frac{1}{t^2}; -1 - \frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{2 + \frac{2}{t^4} + \frac{2}{t^2}}}$;
$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{3}}{t^3\sqrt{\left(2+\frac{2}{t^4}+\frac{2}{t^2}\right)^3}}$;
$\overrightarrow{B(t)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
$\tau(t) = 0$.
Poichè la torsione è nulla, la curva è piana.
Il piano che contiene la curva ha la forma:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Sostituendo al posto di $x, y; z$ l'equazione parametrica della curva,
$at + b\left(1 + \frac{1}{t}\right) + c\left(\frac{1}{t} - t\right) + d = 0$;
$at + b + \frac{b}{t} + \frac{c}{t} - ct + d = 0$;
$(a - c)t + (b + d) + \frac{(b + c)}{t} = 0$.

La relazione deve essere vera per ogni $t \in [1; 10]$, quindi si deve risolvere il sistema:
$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$. Una possibile soluzione è $a = c = 1$; $b = d = -1$.
Il piano cercato è:

$$x - y + z - 1 = 0.$$

PROBLEMA 2.)
$\beta'(t) = (1 - cos(t); sin(t); 1)$; $\beta''(t) = (sin(t); cos(t); 0)$;
$\beta'''(t) = (cos(t); -sin(t); 0)$; $\|\beta'(t)\| = \sqrt{3 - 2cos(t)}$.

$\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{(1 - cos(t); sin(t); 1)}{\sqrt{3 - 2cos(t)}}$.

$(\beta' \wedge \beta'')(t) = (-cos(t); sin(t); cos(t) - 1)$. $\|\beta' \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{cos^2(t) - 2cos(t) + 2}$.

$\kappa(t) = \sqrt{\dfrac{cos^2(t) - 2cos(t) + 2}{(3 - 2cos(t))^3}}$. $\overrightarrow{B(t)} = \frac{(-cos(t); sin(t); cos(t) - 1)}{\sqrt{cos^2(t) - 2cos(t) + 2}}$.

$\tau(t) = \dfrac{-1}{(cos^2(t) - 2cos(t) + 2)}$.

PROBLEMA 3.)

$\gamma'(t) = (3 - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2)$; $\gamma''(t) = (-6t; 6; 6t)$;

$\gamma'''(t) = (-6; 0; 6)$; $\|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$.

$(\gamma' \wedge \gamma'')(t) = (18t^2 - 18; -36t; 18 + 18t^2)$

$\|\gamma' \wedge \gamma''\| = 18\sqrt{t^4 + 1 + 4t^2 + 1 + t^4} = 18\sqrt{2}(t^2 + 1)$.

$\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{(3 - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2)}{3\sqrt{2}(1 + t^2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}; \dfrac{2t}{1 + t^2}; 1\right)$.

$\kappa(t) = \dfrac{1}{3(t^2 + 1)^2}$.

$\overrightarrow{B(t)} = \dfrac{(18t^2 - 18; -36t; 18 + 18t^2)}{18\sqrt{2}(1 + t^2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2}; \dfrac{-2t}{1 + t^2}; 1\right)$.

$\tau(t) = \dfrac{1}{3(t^2 + 1)^2}$.

PROBLEMA 4.)

$\delta'(t) = \left(-sin(t); cos(t); cos\left(\dfrac{1}{2}t\right)\right)$; $\delta''(t) = \left(-cos(t); -sin(t); -\frac{1}{2}sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)$;

$\delta'''(t) = \left(sin(t); -cos(t); -\dfrac{1}{4}cos\left(\dfrac{1}{2}t\right)\right)$; $\|\delta'(t)\| = \sqrt{1 + cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$.

$(\delta' \wedge \delta'')(t) = \left(sin\left(\dfrac{1}{2}t\right); cos\left(\dfrac{1}{2}t\right); 1\right)$.

$\|\delta' \wedge \delta''\|(t) = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\left(-sin(t); cos(t); cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)}{\sqrt{1 + cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)}}$.

$\kappa(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\left(1 + cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right)^3}}$.

$\overrightarrow{B(t)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(sin\left(\dfrac{1}{2}t\right); cos\left(\dfrac{1}{2}t\right); 1\right)$.

$\tau(t) = \dfrac{cos\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{1}{4}cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{2}$.

PROBLEMA 5.)

$\xi'(t) = (cos(t) - t \cdot sin(t); sin(t) + t \cdot cos(t); 1)$; $\xi''(t) = (-2sin(t) - t \cdot cos(t); 2cos(t) - t$
$\xi'''(t) = (-3cos(t) + t \cdot sin(t); -3sin(t) - t \cdot cos(t); 0)$; $\|\xi'(t)\| = \sqrt{2+t^2}$.
$\xi' \wedge \xi''(t) = \left(-2cos(t) + t \cdot sin(t); -2sin(t) - t \cdot cos(t); 2+t^2\right)$;
$\|\xi' \wedge \xi''\|(t) = \sqrt{(8+t^4+5t^2)}$.
$\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{(cos(t) - t \cdot sin(t); sin(t) + t \cdot cos(t); 1)}{\sqrt{2+t^2}}$.
$\kappa(t) = \sqrt{\dfrac{2}{(2+t^2)^3}}$.
$\overrightarrow{B(t)} = \dfrac{(-2cos(t) + t \cdot sin(t); -2sin(t) - t \cdot cos(t); 2+t^2)}{\sqrt{(8+t^4+5t^2)}}$.
$\tau(t) = \dfrac{t^2+6}{8+t^4+5t^2}$.

PROBLEMA 6.)

$\int_0^1 \|\delta'(s)\| \, ds = \int_0^1 \|-\gamma'(1-s)\| \, ds$.

Con la sostituzione $t = 1-s$, $dt = -ds$,

$\int_0^1 \|\delta'(s)\| \, ds = \int_1^0 - \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt$.

PROBLEMA 7.)

Si verifica subito che anche δ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea:
$\|\delta'(s)\| = \|-\gamma'(1-s)\| = \|\gamma'(1-s)\| = 1$.

Praticamente, δ percorre lo stesso tragitto di γ, con la stessa velocità, ma in senso opposto.

A questo punto,
$\overrightarrow{T_1(s)} = \delta'(s) = -\gamma'(1-s) = -\overrightarrow{T(1-s)}$.
$\kappa_1(s) = \left\|\overrightarrow{T_1'(s)}\right\| = \left\|-\overrightarrow{T'(1-s)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T'(1-s)}\right\| = \kappa(1-s)$.

PROBLEMA 8.)

Il centro di curvatura di γ è $C(s) = \gamma(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)}\overrightarrow{N}(s)$.
$C'(s) = \gamma'(s) + \dfrac{1}{\kappa}\overrightarrow{N'}(s) = \gamma'(s) + \dfrac{1}{\kappa}\left(-\kappa\overrightarrow{T}(s)\right)$.
$\dfrac{1}{\kappa}$ non è stato derivato perchè è costante.
Ma $\overrightarrow{T}(s) = \gamma'(s)$, per cui
$C'(s) = 0$.

Il centro di curvatura resta fisso, per cui la curva, restando a distanza fissata (pari al raggio di curvatura) dal suo centro di curvatura, è contenuta in un pezzo di circonferenza.

PROBLEMA 9.)

La curva è costretta a restare sulla sfera, quindi, se $\gamma(s) = (\gamma_1(s); \gamma_2(s); \gamma_3(s))$, si ha:

$$(\gamma_1(s))^2 + (\gamma_2(s))^2 + (\gamma_3(s))^2 = r^2.$$

Derivo questa relazione.

$$2 \cdot \gamma_1(s) \cdot \gamma_1'(s) + 2 \cdot \gamma_2(s) \cdot \gamma_2'(s) + 2 \cdot \gamma_3(s) \cdot \gamma_3'(s) = 0.$$

Derivo ancora una volta (il 2 può essere semplificato).

$$\begin{gathered} (\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2 + (\gamma_3'(s))^2 + \\ +\gamma_1(s) \cdot \gamma_1''(s) + \cdot\gamma_2(s) \cdot \gamma_2''(s) + \gamma_3(s) \cdot \gamma_3''(s) = 0. \end{gathered}$$

$(\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2 + (\gamma_3'(s))^2$ vale 1 perchè è il quadrato della lunghezza del vettore tangente. Infatti, la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

$\gamma_1(s) \cdot \gamma_1''(s) + \cdot\gamma_2(s) \cdot \gamma_2''(s) + \gamma_3(s) \cdot \gamma_3''(s)$ è $\langle \gamma(s); \gamma''(s) \rangle$. Pertanto,

$$1 + \langle \gamma(s); \gamma''(s) \rangle = 0.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, $|\langle \gamma(s); \gamma''(s) \rangle| \leq \|\gamma(s)\| \cdot \|\gamma''(s)\|$, e così

$$\langle \gamma(s); \gamma''(s) \rangle = -1;$$

$$\begin{gathered} |\langle \gamma(s); \gamma''(s) \rangle| = 1 \\ \|\gamma(s)\| \cdot \|\gamma''(s)\| \geq 1. \end{gathered}$$

Essendo la curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, $\|\gamma''(s)\| = \left\| \frac{d}{ds} \overrightarrow{T(s)} \right\| = \kappa(s)$. Di conseguenza,

$$r \cdot \kappa(s) \geq 1,$$

dove r è $\|\gamma(s)\|$ perchè la curva deve stare sulla sfera.

Quindi,

$$\kappa(s) \geq \frac{1}{r}.$$

PROBLEMA 10.)

$\eta'(t) = (e^t cos(t) - e^t sin(t); e^t sin(t) + e^t cos(t); e^t)$;

$\eta''(t) = (-2e^t sin(t); 2e^t cos(t); e^t)$;

$\eta'''(t) = (-2e^t sin(t) - 2e^t cos(t); 2e^t cos(t) - 2e^t sin(t); e^t)$.

$\|\eta'(t)\| = \sqrt{3}e^t$;

$(\eta' \wedge \eta'')(t) = (e^{2t} sin(t) - e^{2t} cos(t); -e^{2t} cos(t) - e^{2t} sin(t); 2e^{2t})$.

$\|(\eta' \wedge \eta'')(t)\| = \sqrt{6}e^{2t}$.

$\overrightarrow{T(t)} = \left(\frac{cos(t)}{\sqrt{3}} - \frac{sin(t)}{\sqrt{3}}; \frac{cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{sin(t)}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$\overrightarrow{B(t)} = \left(-\frac{cos(t)}{\sqrt{6}} + \frac{sin(t)}{\sqrt{6}}; -\frac{cos(t)}{\sqrt{6}} - \frac{sin(t)}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

$\kappa(t) = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$.

$\tau(t) = \frac{2e^{3t}}{6e^{4t}} = \frac{1}{3e^t}$.

PROBLEMA 11.)

La curva è contenuta in un piano della forma

$$ax + by + cz = 0,$$

con $a; b; c$ non entrambi nulli.

Allora,

$$a\gamma_1(t) + b\gamma_2(t) + c\gamma_3(t) = 0,$$

dove $\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t))$. Derivo due volte:

$$a\gamma_1'(t) + b\gamma_2'(t) + c\gamma_3'(t) = 0;$$
$$a\gamma_1''(t) + b\gamma_2''(t) + c\gamma_3''(t) = 0.$$

$\overrightarrow{\gamma(t)}; \overrightarrow{\gamma'(t)}; \overrightarrow{\gamma''(t)}$ sono tutti vettori perpendicolari a $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$, quindi stanno su un piano di dimensione 2. Allora, $\overrightarrow{\gamma(t)}; \overrightarrow{\gamma'(t)}; \overrightarrow{\gamma''(t)}$ sono linearmente dipendenti.

PROBLEMA 12.)

$\alpha'(t) = (6t; 3; 3at^2)$; $\alpha''(t) = (6; 0; 6at)$; $\alpha'''(t) = (0; 0; 6a)$.

$\kappa(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2t^4 + a^2t^2 + 1}{(a^2t^4 + 4t^2 + 1)^3}}$;

$\tau(t) = -\frac{a}{3(a^2t^4 + a^2t^2 + 1)}$.

La curva è piana solo se la torsione è nulla, e cioè $\tau = 0$ identicamente. Quindi, deve essere $a = 0$.

Per $a = 2$, la curvatura è

$\kappa(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{(4t^4 + 4t^2 + 1)^3}} = \frac{2}{3(2t^2 + 1)^4}$.

Per $a = 2$, la torsione è:

$\tau(t) = -\frac{2}{3(2t^2 + 1)}$.

Per $a = 2$, la terna di Frenet-Serre è data da:

$\overrightarrow{T(t)} = \frac{1}{1 + 2t^2}\left(2t; 1; 2t^2\right)$;

$\overrightarrow{N(t)} = \frac{1}{1 + 2t^2}\left(1 - 2t^2; -2t; 2t\right)$;

$\overrightarrow{B(t)} = \frac{1}{1 + 2t^2}\left(2t; -2t^2; -1\right)$.

c.) Posto $a = 2$, A è il punto raggionto ponendo $t = 0$, B è il punto raggiunto per $t = -1$. La lunghezza è sempre positiva, quindi l'integrale si esegue utilizzando -1 come estremo inferiore e 0 come estremo superiore.

$\ell(\alpha) = \int_{-1}^{0} \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}dt = \int_{-1}^{0} 3\left(2t^2 + 1\right) dt = 5$.

PROBLEMA 13.)

$\beta(t) = (cos(t); sin(t); cos(at))$;

$\beta'(t) = (-sin(t); cos(t); -asin(at))$;

$\beta''(t) = (-cos(t); -sin(t); -a^2cos(at))$;

$\beta'''(t) = (sin(t); -cos(t); a^3sin(at))$.

Dato che $\langle \beta' \wedge \beta''; \beta''' \rangle = a(a^2 - 1) sin(at)$, la curva è piana, cioè ha torsione IDENTICAMENTE NULLA, se e solo se $a = 0$, $a = 1$ oppure $a = -1$.

Per $a = 2$, la curvatura è

$\kappa(t) = \sqrt{\frac{16cos^2(2t) + 4sin^2(2t) + 1}{(4sin^2(2t) + 1)^3}}$. Valutandola per $t = \pi/2$, si trova

$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{17}$.

Per $a = 2$, la torsione è:

$\tau(t) = \frac{6sin(2t)}{16cos^2(2t) + 4sin^2(2t) + 1}$. Valutandola per $t = \pi/2$, si trova

$\tau\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.