Applicazioni bilineari e matrici.

Il caso reale.

Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Ricordo che un **prodotto scalare** su $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- Per ogni $\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}$ in $\mathbb{R}^n$,

$$g\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\right) = g\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_3}\right) + g\left(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\right),$$

e

$$g\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\right) = g\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right) + g\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_3}\right).$$

- Per ogni $\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}$ in $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$,

$$g\left(c\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right) = cg\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right) = g\left(\overrightarrow{v_1}; c\overrightarrow{v_2}\right).$$

- Per ogni $\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}$ in $\mathbb{R}^n$,

$$g\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right) = g\left(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}\right);$$

- Fissato $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $g\left(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{v}\right) \geq 0$ e $g\left(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{v}\right) = 0$ se e solo se $\overrightarrow{v} = 0$.

ESEMPI

Lavoriamo sempre in coordinate standard, salvo diverse indicazioni.

1) In $\mathbb{R}^4$, sia $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}$ tale che $g\left((x_1; y_1; z_1; t_1); (x_2; y_2; z_2; t_2)\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$. g soddisfa le prime tre proprietà, ma non la quarta:

$$g\left((0; 0; 0; 1); (0; 0; 0; 1)\right) = -1.$$

2) In $\mathbb{R}^2$, sia $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ tale che $g\left((x_1; y_1); (x_2; y_2)\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + 1$. Essa non soddisfa la seconda proprietà:

$$g\left(2 \cdot (1; 0); (0; 1)\right) = g\left((2; 0); (0; 1)\right) = 1,$$
$$2 \cdot g\left((1; 0); (0; 1)\right) = 2 \cdot 1 = 2.$$

3) In $\mathbb{R}^2$, sia $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ tale che $g\left((x_1; y_1); (x_2; y_2)\right) = x_1 + x_2$. Essa non soddisfa la quarta proprietà: $g\left((-1; 0); (-1; 0)\right) = -2 < 0$.

4) In $\mathbb{R}^2$, sia $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ tale che $g'\left((x_1; y_1); (x_2; y_2)\right) = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$. Si vede subito che g soddisfa tutte le quattro proprietà. Quindi, g' è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

Sia ora $C = (c_{ij})$ una matrice $n \times n$ reale. A C si può associare un'applicazione bilineare come segue: se $\overrightarrow{X} = {}^t(x_1; x_2; ...; x_n)$ e $\overrightarrow{Y} = {}^t(y_1; y_2; ...; y_n)$ sono due vettori qualsiasi in $\mathbb{R}^n$ (visti come vettori colonna), poniamo

$$g_C(X; Y) = {}^tX \cdot C \cdot Y.$$

La bilinearità (ovvero le prime due proprietà descritte in precedenza) segue automaticamente dalle proprietà della moltiplicazione di matrici in $\mathbb{R}^n$. Esplicitando le notazioni matriciali:

$${}^tX \cdot C \cdot Y = (x_1; x_2; ...; x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

possiamo anche scrivere:

$${}^tX \cdot C \cdot Y = \sum_{i;j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j.$$

g_C è l'applicazione bilineare associata a C.

Sia ora $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; ...; \overrightarrow{e_n}\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ (per esempio, la base standard). Se $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ è un'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^n$, si ha che $g = g_B$, per qualche matrice $n \times n$ reale B. Sia, infatti,

$$b_{ij} = g\left(e_i; e_j\right).$$

Allora, noti tutti i prodotti $g\left(e_i; e_j\right)$, per ogni $i; j$, g è definita su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e si ha $g = g_B$.

Infatti, se $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}$ e $\overrightarrow{Y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}$, si ha che

$$g\left(\overrightarrow{X}; \overrightarrow{Y}\right) = g\left(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}; y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i g\left(\overrightarrow{e_i}; y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}\right) = \sum_{i;j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$$

dove $b_{ij} = g(e_i; e_j)$. Dunque, B è proprio la matrice associata alla forma bilineare.

In particolare, si vede da ciò che una forma bilineare è un polinomio omogeneo di grado 2 in $\{x_i; y_j\}$ generato dai prodotti $\{x_i y_j\}$. Si noti, inoltre, che la matrice B costruita in precedenza DIPENDE DALLA SCELTA DELLA BASE.

ESEMPIO

Il prodotto scalare standard, rispetto alla base standard, è rappresentato dalla matrice unità I. Ogni prodotto scalare, espresso rispetto ad una base ortonormale, è rappresentato dalla matrice unità I.

ESEMPIO.

In $\mathbb{R}^2$, sia $f((x_1; x_2); (y_1; y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$. I vettori $(x_1; x_2)$ e $(y_1; y_2)$ sono espressi rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$.

Cerco la matrice A di f rispetto alla base $\mathcal{A} = \{(1; 0); (0; 1)\}$. Si ha
$a_{11} = f(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_1}) = 2$;
$a_{12} = f(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}) = -3$;
$a_{21} = f(\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}) = 0$;
$a_{22} = f(\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_2}) = 1$.
Dunque, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Cerco la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1; 0); (1; 1)\}$. Si ha:
$b_{11} = f((1; 0); (1; 0)) = 2$;
$b_{12} = f((1; 0); (1; 1)) = -1$;
$b_{21} = f((1; 1); (1; 0)) = 2$;
$b_{11} = f((1; 1); (1; 1)) = 0$.
Dunque, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Cerco la matrice C di f rispetto alla base $\mathcal{C} = \{(2; 1); (1; -1)\}$. Si ha:
$c_{11} = f((2; 1); (2; 1)) = 3$;
$c_{12} = f((2; 1); (1; -1)) = 9$;
$c_{21} = f((1; -1); (2; 1)) = 0$;
$c_{11} = f((1; -1); (1; -1)) = 6$.
Dunque, $C = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

TEOREMA

Una matrice rappresenta una forma bilineare **simmetrica** (che, quindi, soddisfa le prime tre proprietà dei prodotti scalari) se e solo se è simmetrica.

Dim.) Si supponga che la matrice C sia simmetrica. Allora, la forma rappresentata da C è $g_C(X;Y) = {}^tXCY$. Questa è una matrice 1×1, dunque è simmetrica. $g_C(X;Y) = {}^t\left({}^tXCY\right) = {}^tY\left({}^tC\right)X$. C è simmetrica, dunque ${}^tC = C$, e così ${}^tXCY = {}^tYCX$.

Viceversa, se C rappresenta una forma simmetrica, allora C è simmetrica rispetto a una qualsiasi base: segue immediatamente dalla definizione che $c_{ij} = c_{ji}$. ■

Ad esempio, se C rappresenta un prodotto scalare rispetto ad una base ortogonale, allora C è diagonale. In tal caso, la forma bilineare si dice **diagonalizzata**.

Una matrice C rappresenta un prodotto scalare se è simmetrica e la sua forma diagonale è rappresentata da tutti e soli elementi positivi.

Ora studiamo come si comporta la matrice associata ad una forma bilineare in corrispondenza di un cambiamento di base. Sia $e' = eN$ una nuova base, e siano C la matrice che rappresenta la forma bilineare g rispetto alla base e, C' la matrice che rappresenta g rispetto alla base e'. N è la matrice del cambiamento di base. Sia $\overrightarrow{v} = e'X' = eX$, e sia $\overrightarrow{w} = e'Y' = eY$ (viene utilizzata la notazione di Einstein). Si ha:

$${}^tXCY = {}^tX'C'Y'.$$

Ma $e'X' = eNX'$, e quindi $X = NX'$; $e'Y' = eNY'$, e quindi $Y = NY'$. Sostituendo nell' uguaglianza precedente, si trova

$${}^tX'\,{}^tNCNY' = {}^tX'C'Y'.$$

Poichè questo è vero per ogni scelta di X' e Y', deve essere

$${}^tNCN = C'.$$

Due matrici C e C' tali che $C' = {}^tPCP$ per qualche matrice P si dicono **congruenti**.

ESEMPIO

Nell'esempio precedente, scriviamo la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{A} = \{(1;0)\,;(0;1)\}$ a $\mathcal{B} = \{(1;0)\,;(1;1)\}$. La forma bilineare $f\left((x_1;x_2)\,;(y_1;y_2)\right) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$, rappresentata nella base $\mathcal{A}$ da $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, diventa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nell'esempio precedente, scriviamo la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{A} = \{(1;0)\,;(0;1)\}$ a $\mathcal{C} = \{(2;1)\,;(1;-1)\}$. La forma bilineare $f\left((x_1;x_2)\,;(y_1;y_2)\right) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$, rappresentata nella base $\mathcal{A}$ da $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, diventa

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO: Verificare che nel passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ la matrice si trasforma in modo corretto: esprimendo i vettori di $\mathcal{C}$ nelle loro componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ (ad esempio: $(2;1) = 1\cdot(1;0) + 1\cdot(1;1)$), si passa da B a C.

TEOREMA

Sia A una matrice $n \times n$ reale simmetrica. Esiste allora una matrice invertibile N tale che ${}^tNAN$ sia diagonale.

ESEMPIO

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Allora, si può costruire la base ortogonale procedendo con il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (rispetto alla forma bilineare simmetrica g_A). Si ha, rispetto alla base standard,

$$g_A\left((x_1;x_2)\,;(y_1;y_2)\right) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_2.$$

Partiamo dalla base standard $\{(1;0)\,;(0;1)\}$, e cerchiamo una base $\{\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2}\}$ ortogonale rispetto alla forma bilineare simmetrica g_A.

$\overrightarrow{w_1} = (1;0)$;

$\overrightarrow{w_2} = (0;1) - \dfrac{g_A\left((1;0)\,;(0;1)\right)}{g_A\left((1;0)\,;(1;0)\right)}(1;0) = (0;1) - \dfrac{3}{2}(1;0) = \left(-\dfrac{3}{2};1\right).$

Allora, $N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
${}^tNAN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Un altro modo per diagonalizzare una matrice **simmetrica** C è cercare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) di autovettori di C. Infatti, il prodotto scalare standard si scrive, rispetto alla base standard, come

$$\left\langle \overrightarrow{X}; \overrightarrow{Y} \right\rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Se $\{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; ...; \overrightarrow{u_n}\}$ è la base di autovettori ortogonale (essa esiste sempre per le matrici simmetriche reali), si ha

$$g_C\left(\overrightarrow{u_i}; \overrightarrow{u_j}\right) = {}^t\left(\overrightarrow{u_i}\right) C \overrightarrow{u_j} = \lambda_j \, {}^t\left(\overrightarrow{u_i}\right) \overrightarrow{u_j} = 0,$$

dove λ_j è l'autovalore associato all'autovettore $\overrightarrow{u_j}$. Il risultato è 0 proprio perchè $\overrightarrow{u_i}$ e $\overrightarrow{u_j}$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard.

Nell'esempio precedente, A ha autovalori $3+\sqrt{10}$ e $3-\sqrt{10}$. Gli autovettori corrispondenti sono:
$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3+\sqrt{10}$ e $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3-\sqrt{10}$. I due autovettori sono proprio ortogonali.
Se $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10} \end{pmatrix}$,
${}^tNAN = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10} \\ 1 & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10} \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \frac{80}{9}+\frac{26}{9}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \frac{80}{9}-\frac{26}{9}\sqrt{10} \end{pmatrix}$.
NOTA: se fossero stati normalizzati gli autovettori, gli elementi sulla diagonale sarebbero stati esattamente gli AUTOVALORI di A, perchè in tal caso la matrice N sarebbe stata ortogonale, e dunque si sarebbe avuto ${}^tN = N^{-1}$.

ESERCIZIO

Trovare una matrica invertibile N tale che ${}^tNAN$ sia diagonale, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Suggerimento: utilizzare il metodo di Gram-Schmidt perchè il calcolo degli autovalori, in questo caso, è veramente complicato!

ESERCIZI

1.) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice N tale che $({}^tN)\,AN$ sia diagonale. Procedere sia con il metodo di Gram-Schmidt, sia con la ricerca di una base ortonormale di autovettori, e confrontare i risultati ottenuti. La forma bilineare simmetrica associata ad A (rispetto alla base standard) è definita positiva?

2.) Sia $C = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice N tale che $({}^tN)\,CN$ sia diagonale. Procedere sia con il metodo di Gram-Schmidt, sia con la ricerca di una base ortonormale di autovettori, e confrontare i risultati ottenuti. Trovare matrice ortogonale P tale che $P^{-1}CP$ sia diagonale. Trovare una matrice P' tale che $\left({}^tP'\right)C^3P'$ sia diagonale (e scrivere esplicitamente $\left({}^tP'\right)C^3P'$). La forma bilineare simmetrica associata a C (rispetto alla base standard) è definita positiva?

3.) Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice N tale che $({}^tN)\,AN$ sia diagonale. Procedere sia con il metodo di Gram-Schmidt, sia con la ricerca di una base ortonormale di autovettori, e confrontare i risultati ottenuti. La forma bilineare simmetrica associata ad A (rispetto alla base standard) è definita positiva?

4.) Sia $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice N tale che $({}^tN)\,AN$ sia diagonale. Procedere sia con il metodo di Gram-Schmidt, sia con la ricerca di una base ortonormale di autovettori, e confrontare i risultati ottenuti. La forma bilineare simmetrica associata ad A (rispetto alla base standard) è definita positiva?

5) Considerare la forma bilineare data, rispetto alla base standard, da $g\left((x_1;x_2);(y_1;y_2)\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2$. La forma bilineare è simmetrica? Scrivere la matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{A} = \{(1;0);(0;1)\}$; $\mathcal{B} = \{(1;0);(2;3)\}$ e $\mathcal{C} = \{(2;5);(-3;1)\}$. Trovare una base rispetto alla quale la matrice associata a g sia diagonale. E' possibile trovare la base richiesta in modo tale che la matrice del cambiamento di base sia ORTOGONALE? Dire poi se g è definita positiva.

SOLUZIONI

1) Se $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $({}^tN)\,AN = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La forma bilineare associata (rispetto alla base standard) è definita positiva.

2) Se $N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{105}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$, $({}^tN)\,AN = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$. La forma bilineare associata (rispetto alla base standard) non è definita positiva. $P = P' = N$, perchè N è già una matrice ortogonale ($N = N^{-1}$).

3) Se $N = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $({}^tN)\,AN = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. La forma bilineare associata (rispetto alla base standard) non è definita positiva.

4) Se $N = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, $({}^tN)\,AN = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La forma bilineare associata (rispetto alla base standard) non è definita positiva.

5) Rispetto alla base $\mathcal{A}$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;

Rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$;

Rispetto alla base $\mathcal{C}$:

$C = \begin{pmatrix} -6 & -42 \\ -42 & -5 \end{pmatrix}$.

La matrice associata è simmetrica, dunque è possibile trovare una matrice ortogonale che la diagonalizza. Essa è

$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, e $({}^tP)\,AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Il caso complesso.

Sia $\mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale **complesso**. Un **prodotto hermitiano** è un'applicazione $g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}$ che ad ogni coppia di vettori $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} \in \mathbb{C}^n$ associa un numero complesso $g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, e che soddisfa i seguenti assiomi:

1. (Proprietà lineare) $g(a_1\overrightarrow{u}_1 + a_2\overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{v}) = a_1 \cdot g(\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{v}) + a_2 \cdot g(\overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{v})$, $\forall \overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{v} \in \mathbb{C}^n$; $\forall a_1; a_2 \in \mathbb{C}$.
2. (Proprietà sesquilineare) $g(\overrightarrow{u}; b_1\overrightarrow{v}_1 + b_2\overrightarrow{v}_2) = \overline{b_1} \cdot g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}_1) + \overline{b_2} \cdot g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}_2)$, $\forall \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{v}_2 \in \mathbb{C}^n$; $\forall b_1; b_2 \in \mathbb{C}$.
3. (Proprietà simmetrica coniugata) $g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \overline{g(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u})}$, $\forall \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} \in \mathbb{C}^n$.
4. (Proprietà definita positiva) $g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{u})$ è reale, $g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{u}) \geq 0$, e $g(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{u}) = 0$ se e solo se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

ESEMPIO

$g : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longmapsto \mathbb{C}$, $g\left((x_1;x_2);(y_1;y_2)\right) = x_1y_1 + x_2y_2$ non è un prodotto Hermitiano perchè non rispetta la proprietà sesquilineare.

ESEMPIO

Sia ora $C = (c_{ij})$ una matrice $n \times n$ complessa. A C si può associare un'applicazione bilineare come segue: se $\overrightarrow{X} = {}^t(x_1;x_2;...;x_n)$ e $\overrightarrow{Y} = {}^t(y_1;y_2;...;y_n)$ sono due vettori qualsiasi in $\mathbb{C}^n$ (visti come vettori colonna), poniamo

$$g_C(X;Y) = {}^tX \cdot C \cdot \overline{Y}.$$

La sesquilinearità (ovvero le prime due proprietà descritte in precedenza) segue automaticamente dalle proprietà della moltiplicazione di matrici in $\mathbb{C}^n$. Esplicitando le notazioni matriciali:

$${}^tX \cdot C \cdot \overline{Y} = (x_1;x_2;...;x_n)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

possiamo anche scrivere:

$${}^tX \cdot C \cdot \overline{Y} = \sum_{i;j=1}^{n} c_{ij}x_i\overline{y_j}.$$

g_C è l'applicazione sesquilineare associata a C.

Sia ora $\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};...;\overrightarrow{e_n}\}$ una base di $\mathbb{C}^n$ (per esempio, la base standard). Se $g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}$ è un'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^n$, si ha che $g = g_B$, per qualche matrice $n \times n$ reale B. Sia, infatti,

$$b_{ij} = g\left(e_i;e_j\right).$$

Allora, noti tutti i prodotti $g\left(e_i;e_j\right)$, per ogni $i;j$, g è definita su tutto $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e si ha $g = g_B$.

Infatti, se $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}$ e $\overrightarrow{Y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}$, si ha che

$$g\left(\overrightarrow{X};\overrightarrow{Y}\right) = g\left(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n};y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i g\left(\overrightarrow{e_i};y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + ... + y_n\overrightarrow{e_n}\right) = \sum_{i;j=1}^{n} b_{ij}x_i\overline{y_j},$$

dove $b_{ij} = g(e_i; e_j)$. Dunque, B è proprio la matrice associata alla forma sesquilineare.

In particolare, si vede da ciò che una forma sesquilineare è un polinomio omogeneo di grado 2 in $\{x_i; y_j\}$ generato dai prodotti $\{x_i \overline{y_j}\}$. Si noti, inoltre, che la matrice B costruita in precedenza DIPENDE DALLA SCELTA DELLA BASE.

ESEMPIO

Il prodotto hermitiano standard, rispetto alla base standard, è rappresentato dalla matrice unità I. Ogni prodotto hermitiano, espresso rispetto ad una base ortonormale, è rappresentato dalla matrice unità I.

ESEMPIO

In $\mathbb{C}^2$, sia $h((x_1; x_2); (y_1; y_2)) = (2+6i)\, x_1\overline{y_1} + (5+3i)\, x_1\overline{y_2} + (9-i)\, x_2\overline{y_1} + (4-2i)\, x_2\overline{y_2}$. I vettori $(x_1; x_2)$ e $(y_1; y_2)$ sono espressi rispetto alla base standard di $\mathbb{C}^2$.

Cerco la matrice A di h rispetto alla base $\mathcal{A} = \{(1;0); (0;1)\}$. Si ha
$a_{11} = h(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_1}) = 2+6i$;
$a_{12} = h(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}) = 5+3i$;
$a_{21} = h(\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}) = 9-i$;
$a_{22} = h(\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_2}) = 4-2i$.
Dunque, $A = \begin{pmatrix} 2+6i & 5+3i \\ 9-i & 4-2i \end{pmatrix}$.

Cerco la matrice B di h rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2-3i; 5+8i); (-4; 3-7i)\}$. Si ha:
$b_{11} = h((2-3i; 5+8i); (2-3i; 5+8i)) = 310-4i$;
$b_{12} = h((2-3i; 5+8i); (-4; 3-7i)) = -226+132i$;
$b_{21} = h((-4; 3-7i); (1;0)) = -184-198i$;
$b_{11} = h((-4; 3-7i); (-4; 3-7i)) = 208+68i$.
Dunque, $B = \begin{pmatrix} 310-4i & -226+132i \\ -184-198i & 208+68i \end{pmatrix}$.

ESEMPIO

In $\mathbb{C}^2$, sia $h((x_1; x_2); (y_1; y_2)) = x_1\overline{y_1} + (1+i)\, x_1\overline{y_2} + (1-i)\, x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$. I vettori $(x_1; x_2)$ e $(y_1; y_2)$ sono espressi rispetto alla base standard di $\mathbb{C}^2$.

Cerco la matrice A di h rispetto alla base $\mathcal{A} = \{(1;0); (0;1)\}$. Si ha
$a_{11} = h(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_1}) = 1$;

$a_{12} = h\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right) = 1 + i;$
$a_{21} = h\left(\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}\right) = 1 - i;$
$a_{22} = h\left(\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_2}\right) = 3.$
Dunque, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}.$
Cerco la matrice B di h rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1; i)\,; (1+i; 0)\}$. Si ha:
$b_{11} = h\left((1; i)\,; (1; i)\right) = 6;$
$b_{12} = h\left((1; i)\,; (1+i; 0)\right) = 3 - i;$
$b_{21} = h\left((1+i; 0)\,; (1; i)\right) = 3 + i;$
$b_{11} = h\left((1+i; 0)\,; (1+i; 0)\right) = 2.$
Dunque, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}.$

TEOREMA

Una matrice rappresenta una forma sesquilineare **hermitiana** (che, quindi, soddisfa le prime tre proprietà dei prodotti hermitiani) se e solo se è hermitiana.

Dim.) Si supponga che la matrice C sia simmetrica. Allora, la forma rappresentata da C è $g_C(X; Y) = {}^tXC\overline{Y}$. Questa è una matrice 1×1, dunque è simmetrica. $g_C(X; Y) = {}^t\left({}^tXC\overline{Y}\right) = {}^t\overline{Y}\left({}^tC\right)X = \overline{{}^tY\left({}^t\overline{C}\right)\overline{X}}$. C è hermitiana, dunque ${}^t\overline{C} = C$, e così ${}^tXC\overline{Y} = \overline{{}^tYC\overline{X}}$.

Viceversa, se C rappresenta una forma hermitiana, allora C è hermitiana rispetto a una qualsiasi base: segue immediatamente dalla definizione che $c_{ij} = \overline{c_{ji}}$. ■

Ad esempio, se C rappresenta un prodotto hermitiano rispetto ad una base ortogonale, allora C è diagonale. In tal caso, la forma sesquilineare si dice **diagonalizzata**.

Una matrice C rappresenta un prodotto hermitiano se è hermitiana e la sua forma diagonale è rappresentata da tutti e soli elementi reali positivi.

Ora studiamo come si comporta la matrice associata ad una forma sesquilineare in corrispondenza di un cambiamento di base. Sia $e' = eN$ una nuova base, e siano C la matrice che rappresenta la forma bilineare g rispetto alla base e, C' la matrice che rappresenta g rispetto alla base e'. N è la matrice del cambiamento di base. Sia $\overrightarrow{v} = e'X' = eX$, e sia $\overrightarrow{w} = e'Y' = eY$ (viene utilizzata la notazione di Einstein). Si ha:

$${}^tXC\overline{Y} = {}^tX'C'\overline{Y'}.$$

Ma $e'X' = eNX'$, e quindi $X = NX'$; $e'Y' = eNY'$, e quindi $Y = NY'$. Sostituendo nell' uguaglianza precedente, si trova

$$ {}^tX'\,{}^tNC\overline{NY'} = {}^tX'C'\overline{Y'}. $$

Poichè questo è vero per ogni scelta di X' e Y', deve essere

$$ {}^tNC\overline{N} = C'. $$

Due matrici C e C' tali che $C' = {}^tPC\overline{P}$ per qualche matrice P si dicono **congruenti**. Se $Q = \overline{P}$, si vede che $C' = {}^t\overline{Q}CQ$, ovvero che

$$ C' = Q^*CQ $$

ESEMPIO

Nell'esempio precedente, scriviamo la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{A} = \{(1;0)\,;(0;1)\}$ a $\mathcal{B} = \{(1;i)\,;(1+i;0)\}$. La forma bilineare è $h\left((x_1;x_2)\,;(y_1;y_2)\right) = x_1\overline{y_1} + (1+i)\,x_1\overline{y_2} + (1+i)\,x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$, rappresentata nella base $\mathcal{A}$ da $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$, diventa

$$ B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}. $$

TEOREMA

Sia A una matrice $n \times n$ reale hermitiana. Esiste allora una matrice invertibile N tale che ${}^tNA\overline{N}$ sia diagonale.

ESEMPIO

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Allora, si può costruire la base ortogonale procedendo con il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (rispetto alla forma sesquilineare simmetrica g_A). Si ha, rispetto alla base standard,

$$ g_A\left((x_1;x_2)\,;(y_1;y_2)\right) = x_1\overline{y_1} - i\cdot x_1\overline{y_2} + i\cdot x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}. $$

Partiamo dalla base standard $\{(1;0)\,;(0;1)\}$, e cerchiamo una base $\{\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2}\}$ ortogonale rispetto alla forma sesquilineare hermitiana g_A.

$\overrightarrow{w_1}=(1;0)$;

$\overrightarrow{w_2}=(0;1)-\dfrac{g_A\left((0;1)\,;(1;0)\right)}{g_A\left((1;0)\,;(1;0)\right)}(1;0)=(0;1)-i\cdot(1;0)=(-i;1)$.

Si noti che, al numeratore della frazione, il vettore su cui viene fatta la proiezione è sulla SECONDA componente.

Allora, $N=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

${}^t N A\overline{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Un altro modo per diagonalizzare una matrice **hermitiana** C (per congruenza) è cercare una base ortogonale (rispetto al prodotto hermitiano standard) di autovettori di C. Infatti, il prodotto hermitiano standard si scrive, rispetto alla base standard, come

$$\left\langle\overrightarrow{X};\overrightarrow{Y}\right\rangle={}^t X\overline{Y}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}.$$

Se $\{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2};...;\overrightarrow{u_n}\}$ è la base di autovettori ortogonale (essa esiste sempre per le matrici hermitiane), si ha

$$g_C\left(\overrightarrow{u_i};\overrightarrow{u_j}\right)={}^t\left(\overrightarrow{u_i}\right)C\overline{\left(\overrightarrow{u_j}\right)}=\overline{\lambda_j}\;{}^t\left(\overrightarrow{u_i}\right)\overline{\left(\overrightarrow{u_j}\right)}=0,$$

dove λ_j è l'autovalore associato all'autovettore $\overrightarrow{u_j}$. Il risultato è 0 proprio perchè $\overrightarrow{u_i}$ e $\overrightarrow{u_j}$ sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard.

ESEMPIO

Nell'esempio precedente, A ha autovalori 0 e 2. Gli autovettori corrispondenti sono:

$\left\{\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 0$ e $\left\{\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 2.$. I due autovettori sono proprio ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard.

Se $N=\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

${}^t NAN=\begin{pmatrix}i & 1\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

NOTA: se fossero stati normalizzati gli autovettori, gli elementi sulla diagonale sarebbero stati esattamente gli AUTOVALORI di A, perchè in tal caso la matrice N sarebbe stata ortogonale, e dunque si sarebbe avuto ${}^tN = N^{-1}$. Infatti, se si pone

$$N = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$${}^tNAN = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZI.

1.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{pmatrix},$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva.

2.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & -4+i \\ 2-i & 6 & i \\ -4+i & i & 3 \end{pmatrix},$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva.

3.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva e diagonalizzarla, usando il metodo di Gram-Schmidt, rispetto alle forme sesquilineari.

4.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 4 & 2-3i \\ -2i & 2+3i & 7 \end{pmatrix}.$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva e diagonalizzarla, usando il metodo di Gram-Schmidt, rispetto alle forme sesquilineari.

5.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ -1-i & -1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva e diagonalizzarla, usando il metodo di Gram-Schmidt, rispetto alle forme sesquilineari.

6.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & -4 \end{pmatrix},$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva e diagonalizzarla, usando il metodo di Gram-Schmidt, rispetto alle forme sesquilineari.

7.) Dire se la forma sesquilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ 1 & 2-3i \end{pmatrix},$$

è Hermitiana. In caso affermativo, dire anche se è definita positiva e diagonalizzarla, usando il metodo di Gram-Schmidt, rispetto alle forme sesquilineari.

SOLUZIONI.

1.) La forma sesquilineare è Hermitiana ma non definita positiva: il determinante è negativo, dunque almeno uno degli autovalori non è positivo.

2.) La forma sesquilineare non è definita positiva.

3.) La forma sesquilineare è Hermitiana. Una base che la diagonalizza, per esempio, è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La matrice diagonale corrispondente è $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{pmatrix}$. Si vede così che essa non è definita positiva.

4.) La forma sesquilineare è Hermitiana. Una base che la diagonalizza, per esempio, è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5+9i \\ -5i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (ho scelto $(0;0;2)$

come terzo vettore di base) . La matrice diagonale corrispondente è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix}$.
Si vede così che essa non è definita positiva.

5.) La forma sesquilineare non è Hermitiana.

6.) La forma sesquilineare è Hermitiana. Una base che la diagonalizza è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La matrice diagonale corrispondente è $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$.
Dunque, essa non è definita positiva.

7.) La forma sesquilineare non è Hermitiana.

Forme Quadratiche

Un'applicazione $q : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ si dice **forma quadratica** se $q(\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{v})$, per qualche forma bilineare simmetrica g su $\mathbb{R}^n$. q si dice **forma quadratica associata a** g.

Se g è rappresentata da una matrice simmetrica $A = (a_{ij})$, rispetto alla base standard, allora si ha

$$q(X) = g(X; X) = {}^tX \cdot A \cdot X =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j.$$

Quest'ultima espressione formale si dice **polinomio quadratico** corrispondente alla matrice simmetrica A. Se A è diagonale, allora q ha la **rappresentazione diagonale:**

$$q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2.$$

ESERCIZI.

1.) Dimostrare che l'insieme delle forme quadratiche è uno spazio vettoriale reale di dimensione $\frac{1}{2}n(n+1)$.

2.) Trovare la matrice simmetrica associata al seguente polinomio di secondo grado:

$$q(x; y; z) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 14yz + 5z^2.$$

3.) Trovare la matrice simmetrica associata al seguente polinomio di secondo grado:

$$q\left(x;y;z\right)=x^2-xz+y^2.$$

4.) Trovare la matrice simmetrica associata al seguente polinomio di secondo grado:

$$q\left(x;y;z\right)=xy+y^2+4xz+z^2.$$

5.) Trovare la matrice simmetrica associata al seguente polinomio di secondo grado:

$$q\left(x;y;z\right)=xy+yz.$$

SOLUZIONI

1.) Esso coincide con lo spazio delle matrici simmetriche $n\times n$, rispetto alle usuali addizione di matrici e moltiplicazione di matrici per scalari: infatti, ad ogni matrice simmetrica corrisponde una e una sola forma quadratica. Una base per questo spazio è data dalle seguenti matrici:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix};...;\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix};...\right\}.$$

A turno, le matrici simmetriche di base hanno l'elemento di posto $(i;j)$, con $i\leq j$ (e, corrispondentemente, anche l'elemento di posto $(j;i)$) uguali a 1, mentre tutto il rimanente è uguale a 0. Si vede quindi che la base ha cardinalità $\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$.

2.) $\begin{pmatrix}2&-4&-8\\-4&1&7\\-8&7&5\end{pmatrix}.$

3.) $\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}.$

4.) $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&2\\\frac{1}{2}&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}.$

5.) $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$