Esercizi laboratorio di Geometria 1A

1) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$u_1 = (1; -2; 5; -3);$
$u_2 = (2; 3; 1; -4);$
$u_3 = (3; 8; -3; -5).$

Selezionare un sottoinsieme di $\{u_1; u_2; u_3\}$ che formi una base di W. Inoltre, estendere la base di W così trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$. Ciò si può sicuramente fare, per i teorema di completamento della base.

2) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai seguenti vettori:

$u_1 = (1; 2; -1; 3; 4);$
$u_2 = (2; 4; -2; 6; 8);$
$u_3 = (1; 3; 2; 2; 6)$

$u_4 = (1; 4; 5; 1; 8);$
$u_5 = (2; 7; 3; 3; 9).$
Selezionare un sottoinsieme di $\{u_1; u_2; u_3; u_4; u_5\}$ che formi una base di W.

3) Si consideri $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sia W il sottospazio vettoriale di V generato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcolare un sottoinsieme di $\{A; B; C; D\}$ che formi una base di W. Inoltre, estendere la base di W così trovata ad una base di $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

4) Sia V lo spazio dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3, e sia W il sottospazio vettoriale di V generato dai seguenti polinomi:

$u_1(t) = t^3 - 4t^2 - 2t + 1;$
$u_2(t) = t^3 - 3t^2 - t + 2;$
$u_3(t) = 3t^3 - 8t^2 - 2t + 7.$
Selezionare un sottoinsieme di $\{u_1(t); u_2(t); u_3(t)\}$ che formi una base di W. Inoltre, estendere la base di W così trovata ad una base di V.

5) Considero i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^5$: $U = Span(u_1; u_2; u_3)$ e $V = Span(v_1; v_2; v_3)$, dove
$u_1 = (1; 3; -3; -1; -4)$;
$u_2 = (1; 4; -1; -2; -2)$;
$u_3 = (2; 9; 0; -5; -2)$;
$v_1 = (1; 6; 2; -2; 3)$;
$v_2 = (2; 8; -1; -6; -5)$;
$v_3 = (1; 3; -1; -5; -6)$.

Trovare una base di $U \cap V$.

6) Considero i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U = Span(u_1; u_2; u_3)$ e $V = Span(v_1; v_2; v_3)$, dove
$u_1 = (1; 4; -1; 3)$;
$u_2 = (1; 5; 0; 5)$;
$u_3 = (3; 10; -5; 5)$;
$v_1 = (1; 4; 0; 6)$;
$v_2 = (1; 2; -1; 5)$;
$v_3 = (2; 2; -3; 9)$.

Trovare una base di $U \cap V$.

7) Una base di $\mathbb{R}^2$ è $\{u_1; u_2\}$, dove
$u_1 = (1; -2)$;
$u_2 = (4; -7)$.

Esprimere il vettore $v_1 = (1; 1)$ ed il vettore $v_2 = (3; 5)$ rispetto a tale base.

8) Una base di $\mathbb{R}^4$ è $\{u_1; u_2; u_3; u_4\}$, dove
$u_1 = (0; 0; 0; 1)$;
$u_2 = (0; 0; 1; 1)$;

$u_3 = (0; 1; 1; 0)$;
$u_4 = (1; 1; 0; 0)$.
Esprimere il vettore $v_1 = (2; 1; -3; 1)$ ed il vettore $v_2 = (0; -1; -2; 3)$ rispetto a tale base.

9) Considero i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^5$: $U = Span(u_1; u_2; u_3)$ e V, dove
$u_1 = (2; 1; 1; 0; 2)$;
$u_2 = (-1; 1; 0; 0; 2)$;
$u_3 = (0; 2; 0; 1; 1)$.

e
$V=\{(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5):x_1-x_2-x_3-x_4=x_1-x_5=x_4=0\}$.
Trovare una base di $U\cap V$.

10) In $\mathbb{R}^5$, siano
$W_1=\{(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5):2x_1-x_2-x_3=x_4-3x_5=0\}$,
$W_2=\{(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5):2x_1-x_2+x_3+4x_4+4x_5=0\}$.
Trovare la dimensione e una base di W_1+W_2 e di $W_1\cap W_2$.

11) In $\mathbb{R}^5$, siano
$W_1=\{(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5):x_1=3x_2+2x_3-3x_4-3x_5=0\}$,
$W_2=\{(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5):13x_1-26x_2+6x_3-9x_4-9x_5=0\}$.
Trovare la dimensione e una base di W_1+W_2 e di $W_1\cap W_2$.

Soluzioni

1) $\{u_1;u_2\}$ è una base di W. $\{(1;-2;5;-3);(2;3;1;-4);(0;0;1;0);(0;0;0;1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
2) $\{u_1;u_3;u_5\}$ è una base di W.
3) $\{A;B;D\}$ è una base di W. $\left\{A;B;D;\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^{2\times2}$.
4) $\{u_1(t);u_2(t)\}$ è una base di W. $\{u_1(t);u_2(t);t;1\}$ è una base di V.
5) dim($U\cap V$)=2.
6) dim($U\cap V$)=1.
7) $v_1=-11\cdot u_1+3\cdot u_2$. $v_1=-41\cdot u_1+11\cdot u_2$.
8) $v_1=3\cdot u_1-2\cdot u_2-u_3+2\cdot u_4$. $v_2=4\cdot u_1-u_2-u_3$.
9) Base di $W_1\cap W_2:\{(2;1;1;0;2)\}$.
10) $\dim(W_1+W_2)=5$.
$\dim(W_1\cap W_2)=2$. Base di $W_1\cap W_2$:$\{(1;2;0;0;0);(0;8;-8;3;1)\}$.
11) $\dim(W_1+W_2)=5$.
$\dim(W_1\cap W_2)=2$. Base di $W_1\cap W_2$:$\{(0;0;3;2;0);(0;0;3;0;2)\}$.