

Osservazioni sparse.

Date le molte difficoltà, vi scrivo la correzione PASSAGGIO PER PASSAGGIO del terzo esercizio. Sapevo che era un po' lungo, ma credevo che potesse essere risolto in 40 minuti circa. Infatti, valeva molti punti e gli altri esercizi erano più brevi. Ad ogni modo, il punto a.) poteva essere risolto molto velocemente. Comunque, ecco la soluzione.

$$\gamma(t) = (at - t^3; 3t^2; 3t + t^3);$$

$$\gamma'(t) = (a - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2);$$

$$\gamma''(t) = (-6t; 6; 6t);$$

$$\gamma'''(t) = (-6; 0; 6).$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma''; \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}.$$

Affinchè τ si annulli, è sufficiente che si annulli il NUMERATORE!

$$\gamma' \wedge \gamma''(t) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \gamma' \wedge \gamma''(t) &= \vec{e}_1 (36t^2 - 18t^2 - 18) - \vec{e}_2 (6at - 18t^3 + 18t + 18t^3) + \vec{e}_3 (6a - 18t^2 + 36t^2) = \\ &= (18t^2 - 18; -6at - 18t; 6a + 18t^2). \end{aligned}$$

$\langle \gamma' \wedge \gamma''; \gamma''' \rangle = -6(18t^2 - 18) + 0(6at + 18t) + 6(6a + 18t^2)$. ATTENZIONE: il prodotto scalare di due vettori è un NUMERO!!!

$$-6(18t^2 - 18) + 6(6a + 18t^2) = 0;$$

$$6(6a + 18t^2 - 18t^2 + 18) = 0;$$

$$6a + 18 = 0;$$

$$a = -3.$$

La curva, in tal caso, ha espressione:

$$\gamma(t) = (-3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3).$$

Per trovare il piano in cui è contenuta, si può:

A) fissare con attenzione la curva: si vede subito che la prima componente è l'opposto della terza, e quindi il piano è

$$x = -z;$$

B) Il piano ha equazione

$$ax + by + cz + d = 0;$$

sostituendo:

$$\begin{aligned} a(-3t - t^3) + b(3t^2) + c(3t + t^3) + d &= 0, \\ t^3(-a + c) + t^2(3b) + t(3c - 3a) + d &= 0, \end{aligned}$$

e, per il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -a + c = 0 \\ 3b = 0 \\ 3c - 3a = 0 \\ d = 0 \end{cases},$$

ovvero $b = d = 0$, $a = c$. Se poniamo, per esempio, $c = 1$, troviamo

$$x + z = 0.$$

b.) Posto $a = 3$,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3); \\ \gamma'(t) &= (3 - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2); \\ \gamma''(t) &= (-6t; 6; 6t); \\ \gamma'''(t) &= (-6; 0; 6). \end{aligned}$$

La curva NON è a velocità unitaria: le formule di Frenet-Serre non servono, bisogna usare le formule per le curve a velocità arbitraria.

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(3 - 3t^2)^2 + 36t^2 + (3 + 3t^2)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 9t^4 - 18t^2 + 36t^2 + 9 + 9t^4 + 18t^2} = \sqrt{18 + 18t^4 + 36t^2} = \\ &= \sqrt{18}\sqrt{1 + t^4 + 2t^2} = 3\sqrt{2}\sqrt{(1 + t^2)^2} = 3\sqrt{2}(1 + t^2). \end{aligned}$$

Quindi,

$$\vec{T} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(3 - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2)}{3\sqrt{2}(1 + t^2)} = \frac{(1 - t^2; 2t; 1 + t^2)}{\sqrt{2}(1 + t^2)}.$$

Fino a qui, l'esercizio è semplice. Poi, iniziano i conti più lunghi. In precedenza, avevamo visto che:

$$\gamma' \wedge \gamma''(t) = (18t^2 - 18; -6at - 18t; 6a + 18t^2).$$

Se $a = 3$,

$$\begin{aligned} \gamma' \wedge \gamma''(t) &= (18t^2 - 18; -18t - 18t; 18 + 18t^2) = \\ &= 18(t^2 - 1; -2t; 1 + t^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\gamma' \wedge \gamma''(t)\| &= 18\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2 + (1 + t^2)^2} = \\ &= 18\sqrt{t^4 + 1 - 2t^2 + 4t^2 + t^4 + 1 + 2t^2} = 18\sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2}. \\ &= 18\sqrt{2}(t^2 + 1). \end{aligned}$$

Procediamo:

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{18\sqrt{2}(t^2 + 1)}{54\sqrt{2}(t^2 + 1)^3} = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2}.$$

In precedenza, avevamo visto che:

$$\langle \gamma' \wedge \gamma''; \gamma''' \rangle = -6(18t^2 - 18) + 6(6a + 18t^2).$$

Se $a = 3$,

$$\langle \gamma' \wedge \gamma''; \gamma''' \rangle = -6(18t^2 - 18) + 6(18 + 18t^2) = 18 \cdot 6 = 108.$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma''; \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} = \frac{108}{(18\sqrt{2}(t^2+1))^2} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}.$$

A questo punto, forse dovuto far finire qui l'esercizio. Invece, i conti procedono implacabili... Non sono difficili, ma ce ne sono un po'...

$$\vec{B} = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} = \frac{18(t^2-1; -2t; 1+t^2)}{18\sqrt{2}(t^2+1)} = \frac{(t^2-1; -2t; 1+t^2)}{\sqrt{2}(t^2+1)}.$$

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)} & \frac{-2t}{\sqrt{2}(t^2+1)} & \frac{1+t^2}{\sqrt{2}(t^2+1)} \\ \frac{1-t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} & \frac{2t}{\sqrt{2}(1+t^2)} & \frac{1+t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2(t^2+1)^2} \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ t^2-1 & -2t & 1+t^2 \\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(t^2+1)^2} [\vec{e}_1((-2t)2(1+t^2)) - \vec{e}_2(2(t^2-1)(t^2+1)) + \vec{e}_3(0)] =$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)} (-2t; 1-t^2; 0).$$

VALUTAZIONE (CRITERI)

Io sono abituato a valutare poco importanti gli errori di calcolo, in sede di esame possono accadere, ma non posso trascurare errori di procedimento (a che cosa serve scrivere il sistema di Frenet-Serre se la curva non ha velocità unitaria??). In generale, chi non ha completato il punto b.) del terzo esercizio POTREBBE trovare un voto più alto dell'atteso, per mia filosofia i conti sono non troppo importanti. Se ho ecceduto nelle richieste, vi chiedo di scusarmi, purtroppo non sono stato in grado di calibrare esattamente la lunghezza dello scritto (non ho neanche molta esperienza in proposito...). Per il primo appello mi sono fatto ingannare da alcune consegne con mezz'ora di anticipo, e stavolta ho esagerato dall'altra parte. Ne ho tenuto conto per la valutazione.

REGISTRAZIONE

Chi ha voto non inferiore a 18, può registrare subito il risultato. Io ci sono giovedì 26/7 e martedì 31/7. Dal 15 al 18, si può sostenere un orale per la sufficienza.

ORALE ☺

Le modalità di orale sono le solite (preparare un argomento, per i matematici sugli spazi metrici, e comunicarmelo con qualche giorno di anticipo, per sapere quanto durerà la prova). Poi, farò altre domande sparse sull'intero programma, ma non chiederò a memoria alcuna formula. Al più, mi potrebbe interessare che si sappiano ricavare le stesse. Ad esempio, potrei chiedere perchè la derivata del vettore tangente è ortogonale al vettore stesso, oppure perchè dN/ds ha componente in $T(s)$ opposta a quella di dT/ds (insomma, saper derivare prodotti scalari di vettori di lunghezza 1!).

Programma orale:

Prodotti scalari ed Hermitiani (solo definizioni!)

Spazi metrici (solo definizioni, a parte l'argomento presentato).

Curve (le mie note). **ATTENZIONE:** non serve studiare a memoria le formule; preferirei vedere che si sa come lavorare sui concetti di base di derivazione dei prodotti scalari per ricavare le stesse (poi, se ci si blocca sul singolo passaggio, non è un problema, basta che io veda come ci si destreggia...). Per quanto riguarda la lunghezza di una curva e l'ascissa curvilinea, bastano le definizioni + ricordarsi le condizioni di regolarità di una curva.

Superfici (le mie note). Come sopra! Vedere bene la parte più facile fino allo spazio tangente (esclusa la dimostrazione del teorema sullo spazio tangente). La parte restante, può essere "letta velocemente", nel senso che non chiederò a memoria con precisione come trovare la seconda forma fondamentale o le curvatures, ma solo conoscere il vettore normale e avere l'idea che le curvatures si ottengono derivando il vettore normale stesso.

Coniche e quadriche: poche cose, giusto sapere cosa sono le rotazioni-traslazioni che permettono di trovare la forma canonica.

Insomma, nell'orale di Geo 1B (per prendere voto alto) a me interessa più la comprensione che la parte mnemonica, sarei più che contento di una preparazione a livello simile a quello della prova scritta. Secondo me, avendo frequentato il corso, ci vuole poco per prepararsi.

Nessun problema a chiarire qualsiasi dubbio, io valuto SOLO l'interrogazione, al di fuori si può dire QUALSIASI cosa senza che io valuti negativamente (per esempio, anche $1-1=3!!!$).

Indicativamente: l'orale fa media con lo scritto, con un punteggio max. di 33 (per l'orale PERFETTO). Esempio: se di scritto ho preso 23, con l'orale posso salire fino a 28, ma sono possibili tutte le valutazioni intermedie e/o inferiori (se proprio non si sa nulla, sono costretto a tenerne conto...). Chi ha preso voti dal 26 in su, può anche ottenere la lode.

Nomignolo	Voto	Osservazioni
Otto	Insuff.	
Greta	27	Alzo il voto di 1 punto per quanto detto prima.
Santanico	24	Idem.
Carl F. Gauss	21	Il prodotto scalare di vettori è un numero! La definizione di continuità è scritta bene, applicata male.
Jaco Pastorius	19	Esercizi 1 e 2 molto incompleti. Sbagliata la definizione di bocce. Buono il terzo esercizio.
Ale	23	Peccato per un errore sulle derivate parziali. Manca un pezzo dell'es. 2. Problemi di tempo? Il voto può salire con l'orale.
Casey27	19	Es. 2: Manca quasi tutto.
Lillo	18	Manca quasi tutto il secondo esercizio. Male anche il terzo. Bene la conica.
Enigmista	18	Manca quasi tutto l'es. 2, con evitabili errori di logica. Come si fa il completamento dei quadrati?