DEFINIZIONE

Una **superficie** in $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione $\alpha : U \longmapsto \mathbb{R}^3$, di classe almeno $\mathcal{C}^2$. In realtà, tratteremo solamente superfici di classe $\mathcal{C}^\infty$. Inoltre, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ deve essere un aperto, e α deve essere iniettiva. Siano $(u; v)$ le coordinate su $\mathbb{R}^2$. Indicheremo con S l'immagine di U tramite α.

Definiamo le derivate parziali $\alpha_u = \frac{\partial \alpha}{\partial u}$ e $\alpha_v = \frac{\partial \alpha}{\partial v}$.
Se $\alpha(u; v) = (\alpha_1(u; v); \alpha_2(u; v); \alpha_3(u; v))$, allora $\overrightarrow{\alpha_u}$ è il vettore

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}(u; v); \frac{\partial \alpha_2}{\partial u}(u; v); \frac{\partial \alpha_3}{\partial u}(u; v)\right),$$

e α_v è il vettore

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}(u; v); \frac{\partial \alpha_2}{\partial v}(u; v); \frac{\partial \alpha_3}{\partial v}(u; v)\right).$$

$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}; \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)$ ha rango 2 in ogni punto della parametrizzazione.

DEFINIZIONE

Si definisce un **campo di vettori** su S come un' applicazione $\left(\overrightarrow{V_1\left(u; v\right)}; \overrightarrow{V_2\left(u; v\right)}; \overrightarrow{V_3\left(u; v\right)}\right)$, definita su U, che ad ogni punto della superficie S associa un vettore di $\mathbb{R}^3$.

DEFINIZIONE.

Una curva su S è una curva $\gamma\left(t\right) = \alpha\left(u(t); v(t)\right)$ che sta in ogni punto sulla superficie (ovvero, tale che $\gamma\left(t\right)$ stia su S per ogni valore del parametro t).

DEFINIZIONE

Lo **spazio tangente** alla superficie S in un punto $p = \alpha\left(u_0; v_0\right)$ è lo spazio vettoriale costituito da tutti i vettori $\gamma'\left(t\right)$, dove γ è una qualsiasi curva su S differenziabile che in 0 vale p. γ ha velocità qualunque.

$T_p\left(S\right) = \{\gamma'(0), \gamma : (-\delta; \delta) \longmapsto \alpha\left(U\right) = S$ curva regolare, $\gamma\left(0\right) = p\} \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

TEOREMA

Sia $p \in S$, $p = \alpha(u_0; v_0)$. Allora, $T_p(S) = span\left\{\overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)}; \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}\right\}$.

$\mathcal{DIM}$.) Dimostriamo dapprima che $T_p(S) \subseteq span\{\overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_v}\}$. Sia $\overrightarrow{v} \in T_pS$ un vettore tangente. Allora, esiste una curva $\gamma(t)$ che sta su S tale che $\gamma(0) = p$, e $\overrightarrow{\gamma'(0)} = \overrightarrow{v}$. Dato che γ sta su S, $\gamma(t) = \alpha(u(t); v(t))$. Inoltre, $\gamma(0) = p$, dunque $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$.

Applicando la formula di derivazione delle funzioni composte, $\overrightarrow{\gamma'(0)} = \overrightarrow{\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0; v_0)} \cdot u'(0) + \overrightarrow{\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0; v_0)} \cdot v'(0)$. Dunque,

$$\overrightarrow{\gamma'(0)} = u'(0) \cdot \overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)} + v'(0) \cdot \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}.$$

Dato che $u'(0)$ e $v'(0)$ sono solo due numeri, ne segue che $\overrightarrow{\gamma'(0)} = \overrightarrow{v}$ sta in $span\left\{\overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)}; \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}\right\}$.

Viceversa, sia $\overrightarrow{w} \in span\left\{\overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)}; \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}\right\}$. Allora, $\overrightarrow{w} = a \cdot \overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)} + b \cdot \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}$. Se prendiamo la curva $\gamma(t) = \alpha(u_0 + at; v_0 + bt)$, vediamo che

$$\overrightarrow{\gamma'(0)} = \overrightarrow{\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0; v_0)} \cdot u'(0) + \overrightarrow{\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0; v_0)} \cdot v'(0),$$
$$\gamma'(0) = a \cdot \overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)} + b \cdot \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)} = \overrightarrow{w}.$$

La curva γ ha $\gamma(0) = \alpha(u_0; v_0) = p$; sta su S e $\gamma'(0) = \overrightarrow{w}$. Dunque, $\overrightarrow{w} \in T_pS$. Abbiamo verificato anche che

$$span\left\{\overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)}; \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}\right\} \subseteq T_pS.$$

Dalla doppia inclusione, segue che $span\left\{\overrightarrow{\alpha_u(u_0; v_0)}; \overrightarrow{\alpha_v(u_0; v_0)}\right\} = T_pS$.

♣

Lo spazio tangente ad una superficiein un punto p è un sottospazio vettoriale, ovvero un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine. Affinchè si abbia un "vero" piano tangente, ovvero un piano tangente alla superficie nell'origine, occorre considerare il **piano tangente affine**: esso è il piano parallelo al piano tangente, e passante per il punto p.

ESEMPI DI SUPERFICI PARAMETRIZZABILI.

Ellissoide:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;
parametrizzazione: $(a \cdot sin(u) cos(v); b \cdot sin(u) sin(v); c \cdot cos(u))$.
Iperboloide a una falda:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
parametrizzazione: $(a \cdot cosh(u) cos(v); b \cdot cosh(u) sin(v); c \cdot sinh(u))$.
Iperboloide a due falde:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
parametrizzazione: $(a \cdot cosh(u) cosh(v); b \cdot cosh(u) sinh(v); c \cdot sinh(u))$.
Paraboloide ellittico:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$;
parametrizzazione: $\left(a \cdot ucos(v); b \cdot usin(v); u^2\right)$.
Paraboloide iperbolico:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$;
parametrizzazione: $\left(a \cdot ucosh(v); b \cdot usinh(v); u^2\right)$.
Cono:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;
parametrizzazione: $(a \cdot ucos(v); b \cdot usin(v); cu)$.
Cilindro ellittico:
equazione cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
parametrizzazione: $(a \cdot cos(u); b \cdot sin(u); v)$.

Il piano tangente (vettoriale) ad una superficie è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Il prodotto scalare standard $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ induce su T_pS un prodotto scalare, per **restrizione**:

$$I(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w} \rangle, \forall \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Tale prodotto scalare si dice **prima forma fondamentale** di T_pS. Rispetto alla base $\{\overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_v}\}$ di $\mathbb{R}^3$, esso è rappresentato dalla matrice:

$$G = \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_u} \rangle & \langle \overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_v} \rangle \\ \langle \overrightarrow{\alpha_v}; \overrightarrow{\alpha_u} \rangle & \langle \overrightarrow{\alpha_v}; \overrightarrow{\alpha_v} \rangle \end{pmatrix}.$$

Sia $\overrightarrow{v} \in T_p(S)$, dove $p = \alpha(u_0; v_0)$ è un punto sulla superficie. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$. Dato che $\overrightarrow{v} \in T_p(S)$, esiste una curva differenziabile $\gamma(t)$ tale che $\gamma(0) = p$; $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Definiamo allora:

$$\overrightarrow{v}(f) = \left.\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Possiamo scrivere, dato che γ è una curva su S,

$$\gamma(t) = \alpha(u(t);v(t)).$$

Poichè $\gamma(0) = p$, deve essere $u(0) = u_0$; $v(0) = v_0$.

Allora, $(f\circ\gamma)(t) = (f\circ\alpha)(u(t);v(t))$. $(f\circ\alpha)$ è definita sull'aperto U di $\mathbb{R}^2$ e ha valori in $\mathbb{R}$. Dunque, $(f\circ\alpha)$ è funzione di due variabili reali. Esse sono entrambe dipendenti dal parametro t se si sta lungo la curva γ. Applicando la regola di derivazione per funzioni composte,

$$\left.\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f\circ\alpha)(u(t);v(t))}{dt}\right|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial u}(u_0;v_0)\cdot u'(0) + \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial v}(u_0;v_0)\cdot v'(0).$$

Si noti che, per definire $f\circ\alpha$, è sufficiente che f sia definita su S.

ESEMPIO

Se $f(x;y;z) = x+4y-2z$; $\alpha(u;v) = \left(u+v;3u^2v;-2e^v\right)$, allora $(f\circ\alpha)(u;v) = (u+v)+4\left(3u^2v\right)-2\left(-2e^v\right)$.

Consideriamo il vettore tangente $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\alpha_u(1;1)}$. Allora, si può scegliere $\gamma(t)$ come $\alpha(1+t;1)$, dove $u(t) = 1+t$; $v(t) = 1$ (questo segue dalla dimostrazione del teorema sullo spazio tangente). Dunque, $u'(t)_{|t=0} = 1$, $v'(t)_{|t=0} = 0$. Si ha

$$\overrightarrow{v(f)} = \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial u}(u_0;v_0)\cdot u'(0) + \frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial v}(u_0;v_0)\cdot v'(0) =$$
$$= (v-24uv+0)_{|(u;v)=(1;1)} + 0 = -23.$$

Il secondo addendo è 0 perchè $v'(0) = 0$.

In generale, quando il vettore $\overrightarrow{v}$ che si applica è $\overrightarrow{\alpha_u}$, $\overrightarrow{\alpha_u}(f)$ è semplicemente la derivata di $(f\circ\alpha)$ rispetto ad u, mentre $\overrightarrow{\alpha_v}(f)$ è la derivata di f rispetto a v. Se prendo un generico vettore $\overrightarrow{w}\in T_pS$, questo è combinazione lineare di $\overrightarrow{\alpha_u}$ e $\overrightarrow{\alpha_v}$, cioè

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{\alpha_u} + \mu\overrightarrow{\alpha_v},$$

si ha $\overrightarrow{w}(f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(u_0; v_0) + \mu \frac{\partial f}{\partial v}(u_0; v_0)$.

Sia ora $\overrightarrow{V(u;v)} = (V_1(u;v); V_2(u;v); V_3(u;v))$ un campo di vettori lungo la superficie. Allora, poniamo

$\frac{\partial V}{\partial u}(u;v) = \nabla_{\overrightarrow{\alpha_u}}(V) = (\overrightarrow{\alpha_u}(V_1); \overrightarrow{\alpha_u}(V_2); \overrightarrow{\alpha_u}(V_3)) = \left(\frac{\partial V_1(u;v)}{\partial u}; \frac{\partial V_2(u;v)}{\partial u}; \frac{\partial V_3(u;v)}{\partial u}\right)$;

$\frac{\partial V}{\partial v}(u;v) = \nabla_{\overrightarrow{\alpha_v}}(V) = (\overrightarrow{\alpha_v}(V_1); \overrightarrow{\alpha_v}(V_2); \overrightarrow{\alpha_v}(V_3)) = \left(\frac{\partial V_1(u;v)}{\partial v}; \frac{\partial V_2(u;v)}{\partial v}; \frac{\partial V_3(u;v)}{\partial v}\right)$;

Se prendo un generico vettore $\overrightarrow{w} \in T_pS$, questo è combinazione lineare di $\overrightarrow{\alpha_u}$ e $\overrightarrow{\alpha_v}$, cioè

$$\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{\alpha_u} + \mu \overrightarrow{\alpha_v},$$

e definisco

$\nabla_{\overrightarrow{w}}\left(\overrightarrow{V}\right) = (\overrightarrow{w}(V_1); \overrightarrow{w}(V_2); \overrightarrow{w}(V_3)) = \lambda \frac{\partial V}{\partial u}(u;v) + \mu \frac{\partial V}{\partial v}(u;v)$.

DEFINIZIONE

Di nostro interesse sarà derivare il campo di **vettori normali:**

$$\overrightarrow{N}(u;v) = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|}.$$

DEFINIZIONE

L'**operatore di Weingarten** L esprime la variazione di $\overrightarrow{N}$ in una certa direzione, ovvero mi esprime la "curvatura della superficie in quella direzione". Definiamo:

$L(\overrightarrow{w}) = \nabla_{\overrightarrow{w}}\left(\overrightarrow{N}\right)$, per ogni vettore $\overrightarrow{w} \in T_pS$.

Dimostriamo che $\overrightarrow{\frac{\partial N}{\partial u}}$ è perpendicolare a $\overrightarrow{N}$, e dunque sta in T_pS. Si ha

$$\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{N} \right\rangle = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{N} \right\rangle\right) = 0;$$

$$\langle \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial u} N}; \overrightarrow{N} \rangle + \langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial u} N} \rangle = 0;$$

$$2\left\langle \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial u} N}; \overrightarrow{N} \right\rangle = 0;$$

$$\left\langle \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial u} N}; \overrightarrow{N} \right\rangle = 0.$$

Quindi, $\frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u} = \nabla_{\overrightarrow{\alpha_u}}\left(\overrightarrow{N}\right) = L\left(\overrightarrow{\alpha_u}\right)$ è tangente ad S. Analogamente, si dimostra che $\frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial v}$ è perpendicolare a $\overrightarrow{N}$, e dunque sta in T_pS. Dunque, L è un'applicazione lineare di T_pS in sè stesso. La linearità segue dal fatto che, se $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{\alpha_u} + \mu\overrightarrow{\alpha_v}$,

$$\nabla_{\overrightarrow{w}}\left(\overrightarrow{N}\right) = \lambda\frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u}(u;v) + \mu\frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial v}(u;v).$$

La matrice associata ad L rispetto alla base $\{\overrightarrow{\alpha_u};\overrightarrow{\alpha_v}\}$ sarà

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

dove $L\left(\overrightarrow{\alpha_u}\right) = a_{11}\overrightarrow{\alpha_u} + a_{21}\overrightarrow{\alpha_v}$; $L\left(\overrightarrow{\alpha_v}\right) = a_{12}\overrightarrow{\alpha_u} + a_{22}\overrightarrow{\alpha_v}$.

Gli **autovalori di** L si dicono **curvature principali.** I corrispondenti autovettori si dicono **direzioni principali di curvatura.** La **curvatura media** è

$$H = \frac{1}{2}\left(Tr\left(L\right)\right).$$

La **curvatura Gaussiana** è:

$$K = det\left(L\right).$$

Se k_1 e k_2 sono le curvature principali, allora

$$H = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

e

$$K = k_1 k_2.$$

La curvatura Gaussiana classifica i punti di una superficie: un punto si dice **parabolico** se $K(p) = 0$; **iperbolico** se $K(p) < 0$; **ellittico** se $K(p) > 0$.

Il problema resta il calcolo di tali curvature: la costruzione della matrice L è resa difficile dal fatto di dover derivare esplicitamente $\overrightarrow{N}$. Definiamo allora la **seconda forma fondamentale** come:

$$II\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)=I\left(L\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right).$$

In particolare, ricordo che $\dfrac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u}=L\left(\overrightarrow{\alpha_u}\right)$ e $\dfrac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial v}=L\left(\overrightarrow{\alpha_v}\right)$. Volendo scrivere la matrice di II rispetto alla base $\{\overrightarrow{\alpha_u};\overrightarrow{\alpha_v}\}$, si ha:

$$\begin{aligned}B&=\begin{pmatrix}\left\langle L\left(\overrightarrow{\alpha_u}\right);\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle & \left\langle L\left(\overrightarrow{\alpha_u}\right);\overrightarrow{\alpha_v}\right\rangle\\ \left\langle L\left(\overrightarrow{\alpha_v}\right);\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle & \left\langle L\left(\overrightarrow{\alpha_v}\right);\overrightarrow{\alpha_v}\right\rangle\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u};\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle & \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u};\overrightarrow{\alpha_v}\right\rangle\\ \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial v};\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle & \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial v};\overrightarrow{\alpha_v}\right\rangle\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Essa si può anche scrivere come:

$$B=\begin{pmatrix}-\left\langle \overrightarrow{N};\overrightarrow{\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}}\right\rangle & -\left\langle \overrightarrow{N};\overrightarrow{\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}}\right\rangle\\ -\left\langle \overrightarrow{N};\overrightarrow{\frac{\partial^2\alpha}{\partial v\partial u}}\right\rangle & -\left\langle \overrightarrow{N};\overrightarrow{\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}}\right\rangle\end{pmatrix}.$$

Si vede che II è simmetrica, visto che le derivate parziali miste di una funzione $\mathcal{C}^\infty$coincidono. Ecco come derivano le uguaglianze sopra indicate:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u};\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle&=\left\langle \frac{\overrightarrow{\partial N}}{\partial u};\frac{\overrightarrow{\partial \alpha}}{\partial u}\right\rangle=\\ =\frac{\partial}{\partial u}\left(\left\langle \overrightarrow{N};\frac{\overrightarrow{\partial \alpha}}{\partial u}\right\rangle\right)&-\left\langle \overrightarrow{N};\overrightarrow{\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}}\right\rangle=\\ &=0-\left\langle \overrightarrow{N};\overrightarrow{\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}}\right\rangle.\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\overrightarrow{N}$ è perpendicolare a T_pS, e quindi, in particolare, a $\dfrac{\overrightarrow{\partial\alpha}}{\partial u}$.

Si procede nello stesso modo con gli altri elementi della matrice.

Si nota che $L\cdot G=B$.

Infatti,

$$\begin{aligned}b_{11}=\left\langle L\left(\overrightarrow{\alpha_u}\right);\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle&=\left\langle a_{11}\overrightarrow{\alpha_u}+a_{21}\overrightarrow{\alpha_v};\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle=\\ =a_{11}\left\langle\overrightarrow{\alpha_u};\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle+a_{12}\left\langle\overrightarrow{\alpha_v};\overrightarrow{\alpha_u}\right\rangle&=a_{11}g_{11}+a_{12}g_{21}=\left(L\cdot G\right)_{11}.\end{aligned}$$

Si può provare (esercizio!) la stessa cosa sugli altri coefficienti, e quindi verificare che $L \cdot G = B$

In conclosione, $L = B \cdot G^{-1}$ è la matrice dell'applicazione di Weingarten. In particolare, se interessa solamente conoscere la curvatura Gaussiana di S, si ha:

$$K = det\left(L\right) = \frac{det\left(B\right)}{det\left(G\right)}.$$

ESEMPIO

Consideriamo il paraboloide a sella

$$\alpha\left(u;v\right) = \left(u;v;4u^2 - 9v^2\right).$$

Abbiamo

$$\overrightarrow{\alpha_u\left(u;v\right)} = (1;0;8u);$$
$$\overrightarrow{\alpha_v\left(u;v\right)} = (0;1;-18v).$$

$$\left\langle \overrightarrow{\alpha_u\left(u;v\right)};\overrightarrow{\alpha_u\left(u;v\right)} \right\rangle = 1 + 64u^2;$$
$$\left\langle \overrightarrow{\alpha_u\left(u;v\right)};\overrightarrow{\alpha_v\left(u;v\right)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\alpha_v\left(u;v\right)};\overrightarrow{\alpha_u\left(u;v\right)} \right\rangle = -144uv;$$
$$\left\langle \overrightarrow{\alpha_v\left(u;v\right)};\overrightarrow{\alpha_v\left(u;v\right)} \right\rangle = 1 + 324v^2.$$

Dunque, la matrice associata alla prima forma fondamentale rispetto alla base $\{\overrightarrow{\alpha_u};\overrightarrow{\alpha_v}\}$ è:

$$G = \begin{pmatrix} 1+64u^2 & -144uv \\ -144uv & 1+324v^2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il vettore normale:

$$\overrightarrow{\alpha_u} \wedge \overrightarrow{\alpha_v} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 0 & 8u \\ 0 & 1 & -18v \end{pmatrix} =$$
$$= \left(-8u;18v;1\right).$$

Di conseguenza,

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1+64u^2+324v^2}}\left(-8u;18v;1\right).$$

Ora, calcoliamo gli elementi della seconda forma fondamentale.
$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial\alpha_u}{\partial u}} = (0;0;8).$
$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial\alpha_u}{\partial v}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial\alpha_v}{\partial u}} = (0;0;0).$
$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial\alpha_v}{\partial v}} = (0;0;-18).$
$b_{11} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}} \right\rangle = -\dfrac{8}{\sqrt{1+64u^2+324v^2}}.$
$b_{12} = b_{21} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial v\partial u}} \right\rangle = 0.$
$b_{22} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}} \right\rangle = +\dfrac{18}{\sqrt{1+64u^2+324v^2}}.$
Alla fine,

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{1+64u^2+324v^2}} & 0 \\ 0 & \frac{18}{\sqrt{1+64u^2+324v^2}} \end{pmatrix}.$$

L'inversa di G è complicata da calcolare, ma è facile trovare il suo determinante:

$$det\,(G) = 1 + 64u^2 + 324v^2.$$

Invece,

$$det\,(B) = \frac{-144}{1+64u^2+324v^2}.$$

Alla fine,

$$K\,(u;v) = \frac{-144}{\left(1+64u^2+324v^2\right)^2}.$$

Nel punto $p = (0;0;0)$, parametrizzato da $(u;v) = (0;0)$, si ha:

$$K\,(p) = -144.$$

ESEMPIO

Consideriamo il cilindro

$$\alpha(u;v) = (r \cdot cos(u); r \cdot sin(u); v).$$

Abbiamo

$$\overrightarrow{\alpha_u(u;v)} = (-r \cdot sin(u); r \cdot cos(u); 0);$$
$$\overrightarrow{\alpha_v(u;v)} = (0;0;1).$$

$\left\langle \overrightarrow{\alpha_u(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_u(u;v)} \right\rangle = r^2;$
$\left\langle \overrightarrow{\alpha_u(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_v(u;v)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\alpha_v(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_u(u;v)} \right\rangle = 0;$
$\left\langle \overrightarrow{\alpha_v(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_v(u;v)} \right\rangle = 1.$

Dunque, la matrice associata alla prima forma fondamentale rispetto alla base $\{\overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_v}\}$ è:

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il vettore normale:

$$\overrightarrow{\alpha_u} \wedge \overrightarrow{\alpha_v} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -r \cdot sin(u) & r \cdot cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= (r \cdot cos(u); r \cdot sin(u); 0).$$

Di conseguenza,

$$\overrightarrow{N} = (cos(u); sin(u); 0).$$

Ora, calcoliamo gli elementi della seconda forma fondamentale.

$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial u}} = (-r \cdot cos(u); -r \cdot sin(u); 0).$

$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial v}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_v}{\partial u}} = (0;0;0).$

$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_v}{\partial v}} = (0;0;0).$

$b_{11} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}} \right\rangle = -r.$

$b_{12} = b_{21} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v \partial u}} \right\rangle = 0.$

$b_{22} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}} \right\rangle = 0.$

Alla fine,

$$B = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$det\,(G) = r^2.$$

e

$$det\,(B) = 0.$$

Quindi,

$$K\,(u;v) = 0.$$

Dunque, tutti i punti del cilindro sono parabolici.

In questo caso, è facile calcolare esplicitamente la matrice dell'applicazione di Weingarten. Si ha:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

e così:

$$L = BG^{-1} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che le corvature principali non dipendono dal punto scelto, e valgono sempre $k_1 = -\dfrac{1}{r}$; $k_2 = 0$.

La curvatura media è:

$$H = -\frac{1}{2r}.$$

ESERCIZI

1) Calcolare le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana della sfera

$$\alpha\,(u;v) = (r \cdot sin\,(u)\,cos\,(v)\,; r \cdot sin\,(u)\,sin\,(v)\,; r \cdot cos\,(u)).$$

2.) Dato il paraboloide ellittico

$$\alpha\left(u;v\right)=\left(u;v;u^{2}+3v^{2}\right),$$

calcolare le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana nell'origine $p=(0,0;0)$.

3.) Si consideri la **pseudosfera**

$$\alpha\left(u;v\right)=\left(\int_{0}^{u}\sqrt{1-e^{-2t}}dt;e^{-u}cos\left(v\right);e^{-u}sin\left(v\right)\right).$$

Dimostrare che essa ha curvatura Gaussiana costante pari a $K=-1$.

4.) **GEODETICHE.** Una curva su S (interamente contenuta in S), $\gamma\left(s\right)$, si dice **geodetica** se:

- E' parametrizzata con l'ascissa curvilinea;
- $\overrightarrow{\gamma''\left(s_{0}\right)}$ è **parallelo** alla **normale** $\overrightarrow{N}$ **alla superficie** in ogni punto $\gamma\left(s_{0}\right)$.

Verificare che la curva

$$\gamma\left(s\right)=\left(cos\left(s\right);sin\left(s\right);1\right)$$

è una geodetica per il cilindro

$$\alpha\left(u;v\right)=\left(cos\left(u\right);sin\left(u\right);v\right),$$

ma non per il cono

$$\beta\left(u;v\right)=\left(u\cdot cos\left(v\right);u\cdot sin\left(v\right);u\right).$$

5.) Verificare che le eliche

$$\delta_{a}\left(s\right)=\left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^{2}}}\right);sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^{2}}}\right);as\right),$$

per ogni numero reale a, sono geodetiche per il cilindro

$$\alpha\left(u;v\right)=\left(cos\left(u\right);sin\left(u\right);v\right).$$

6.) Sia data la superficie di rotazione

$$\alpha\left(u;v\right)=\left(f_{1}\left(u\right)\cdot cos\left(v\right);f_{1}\left(u\right)\cdot sin\left(v\right);f_{2}\left(u\right)\right),$$

con $\sqrt{\left(f_1'(u)\right)^2+\left(f_2'(u)\right)^2}=1$ sempre, e f_1;f_2 funzioni $\mathcal{C}^\infty$. Dimostrare che il meridiano

$$\gamma(s)=(f_1(s)\cdot cos(v_0)\,;f_1(s)\cdot sin(v_0)\,;f_2(s)),$$

con v_0 angolo fissato, è una geodetica per la superficie α.

7) La **curvatura normale** di una curva $\gamma(s)$ (parametrizzata a velocità unitaria) è il prodotto scalare

$$\kappa_n=\left\langle \overrightarrow{\gamma''(s)};\overrightarrow{N}\right\rangle,$$

dove $\overrightarrow{N}$ è la normale alla superficie in $\gamma(s)$. La **curvatura geodetica** è

$$\kappa_g=\sqrt{\kappa^2-\kappa_n^2}.$$

Dimostrare che una curva geodetica ha curvatura geodetica costantemente nulla (facile!).

8) Sia data la superficie di rotazione

$$\alpha(u;v)=(f_1(u)\cdot cos(v)\,;f_1(u)\cdot sin(v)\,;f_2(u)),$$

con $\sqrt{\left(f_1(u)\right)^2+\left(f_2(u)\right)^2}=1$ sempre, e f_1;f_2 funzioni $\mathcal{C}^\infty$. Dimostrare che il parallelo

$$\gamma(s)=(f_1(u_0)\cdot cos(s)\,;f_1(u_0)\cdot sin(s)\,;f_2(u_0)),$$

con u_0 fissato, ha curvatura geodetica costante nella superficie α.

9) Calcolare la curvatura Gaussiana e la matrice dell'applicazione di Weingarten per la superficie

$$\alpha(u;v)=(u\cdot cos(v)\,;u\cdot sin(v)\,;log(u)).$$

10) Calcolare la curvatura Gaussiana e la matrice dell'applicazione di Weingarten per la superficie

$$\alpha(u;v)=(u\cdot cos(v)\,;u\cdot sin(v)\,;v).$$

11) Sia $f(u;v)$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ a due variabili. Calcolare la matrice della seconda forma fondamentale e la curvatura Gaussiana della superficie

$$\alpha(u;v)=(u;v;f(u;v)),$$

e mettere in relazione il determinante della matrice hessiana di $f(u_0; v_0)$ con l'ellitticità (o l'iperbolicità o la parabolicità) della superficie in $\alpha(u_0; v_0)$.

12) Calcolare le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana in ogni punto p per la superficie (cono):

$$\beta(u; v) = (u \cdot cos(v); u \cdot sin(v); u),\ u > 0.$$

SOLUZIONI

1) $K = \frac{1}{r^2}$;

$H = \frac{1}{r}$;

$k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$.

2) $k_1 = -6$;

$k_2 = -2$

$H = -4$;

$K = 12$.

3) Ricordarsi che la prima componente è definita tramite un integrale, e il parametro u è un estremo di integrazione. Si ha:

$$\int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}dt = -\sqrt{(1 - e^{-2u})} + arctanh\left(\sqrt{(1 - e^{-2u})}\right),$$

ma si può anche procedere (molto) più velocemente ricordando che la derivata prima di una funzione integrale è semplicemente l'integrando (valutato nel punto). Quindi,

$$\overrightarrow{\alpha_u(u; v)} = \left(\sqrt{(1 - e^{-2u})}; -e^{-u}cos(v); -e^{-u}sin(v)\right),$$
$$\overrightarrow{\alpha_u(u; v)} = \left(0; -e^{-u}sin(v); e^{-u}cos(v)\right).$$

4) $\overrightarrow{\gamma''(s)} = (-cos(s); -sin(s); 0)$. Il campo di vettori normale al cilindro è:

$$\overrightarrow{N_\alpha} = (cos(u); sin(u); 0).$$

Nel punto $\gamma(s) = \alpha(s; 1)$, si ha

$$\overrightarrow{N_\alpha(\gamma(s))} = (-cos(s); -sin(s); 0),$$

che è parallelo a $\overrightarrow{\gamma''(s)}$. Inoltre, si vede subito che $\gamma(s)$ è parametrizzata a velocità unitaria.

l campo di vettori normale al cono è:

$$\overrightarrow{N_\beta} = \left(-\frac{cos\left(v\right)}{\sqrt{2}}; -\frac{sin\left(v\right)}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Nel punto $\gamma\left(s\right) = \beta\left(1; s\right)$, si ha

$$\overrightarrow{N_\beta\left(\gamma\left(s\right)\right)} = \left(-\frac{cos\left(s\right)}{\sqrt{2}}; -\frac{sin\left(s\right)}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

che non è parallelo a $\overrightarrow{\gamma''\left(s\right)}$.
5) δ_a è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Inoltre,

$$\overrightarrow{\delta_a''\left(s\right)} = \left(-\frac{1}{1+a^2}cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); -\frac{1}{1+a^2}sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); 0\right).$$

Il campo di vettori normale al cilindro è:

$$\overrightarrow{N_\alpha} = \left(cos\left(u\right); sin\left(u\right); 0\right).$$

Nel punto $\delta_a\left(s\right) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}; as\right)$, si ha

$$\overrightarrow{N_\alpha\left(\gamma\left(s\right)\right)} = \left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right); 0\right),$$

che è parallelo a $\overrightarrow{\gamma''\left(s\right)}$.
12) $k_1 = 0$;
$k_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}u}$;
$H = -\frac{1}{\sqrt{2}u}$;
$K = 0$.
In particolare, tutti i punti del cono sono parabolici.