Esercizio n◦ 6

Calcoliamo l'intersezione degli asintoti:

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

. Moltiplicando per 3 la prima equazione, si trova

$$\begin{cases} 3x + 9y - 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 + 10y - 2 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ 3x - \frac{1}{5} - 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Dunque, l'iperbole ha centro $C = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Trasferendo il centro del sistema di coordinate nel punto $C = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$, troviamo il nuovo sistema di coordinate:

$$\begin{cases} X' = x - \frac{2}{5} \\ Y' = y - \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Ora occorre ruotare il sistema di coordinate in modo che l'asse x diventi l'asintoto $x + 3y - 1 = 0$ e l'asse y diventi l'asintoto $3x - y - 1 = 0$.

Per fare ciò, ruotiamo l'asse X' di un angolo α la cui tangente è il coefficiente angolare della retta $x + 3y - 1 = 0$, ovvero $-\frac{1}{3}$, in senso ANTIORARIO (la rotazione avviene in senso antiorario ma l'angolo di rotazione è negativo, quindi equivale alla rotazione in senso orario secondo l'angolo $-\alpha$).

Si ha $\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = -\frac{1}{3}$, ovvero $sin\,(\alpha) = -\frac{1}{3}cos\,(\alpha)$.

Poi, $(cos\,(\alpha))^2 + \frac{1}{9}(cos\,(\alpha))^2 = 1$, da cui si trova $cos\,(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e $sin\,(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (e, come detto in precedenza, α è negativo).

Una rotazione in senso antiorario di α del sistema di riferimento equivale quindi al cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,(\alpha) & sin\,(\alpha) \\ -sin\,(\alpha) & cos\,(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che al vettore $(1;0)$ nel sistema di coordinate $(X';Y')$ corrisponde il vettore $\left(\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ nel sistema di coordinate $(X;Y)$, mentre al vettore $(0;1)$ nel sistema di coordinate $(X';Y')$ corrisponde il vettore $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ nel sistema di coordinate $(X;Y)$.

Dunque,
$$\begin{cases} X &= \frac{3}{\sqrt{10}}X' - \frac{1}{\sqrt{10}}Y' \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{10}}X' + \frac{3}{\sqrt{10}}Y' \end{cases}.$$
Passando poi alle coordinate $(x;y)$, troviamo
$\begin{cases} X = \frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{1}{\sqrt{10}} \\ Y = \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$. Questo è il sistema di riferimento canonico.

Il punto di coordinate $(0;0)$ nel sistema $(x;y)$ diventa $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, nel sistema $(X;Y)$. Il sistema $(X;Y)$ è un sistema di riferimento rispetto agli asintoti: l'iperbole ha equazione $XY = k$. Sostituendo le coordinate del punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, troviamo $k = \frac{1}{10}$. Alla fine, l'equazione nel sistema $(X;Y)$ è $XY = \frac{1}{10}$.

Troviamo $\frac{1}{10}(3x - y - 1)(x + 3y - 1) = \frac{1}{10}$, ovvero
$3x^2 - 3y^2 + 8xy - 4x - 2y = 0$.