Soluzioni

- 1) Suppongo (per assurdo) che $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}; \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\}$ siano vettori linearmente dipendenti. Allora esisterbbero tre numeri reali, $a, b, c \in \mathbb{R}$, non tutti contemporaneamente nulli, tali che $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ $+b(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + c(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = 0$. Ne segue che

$$(a+c)\overrightarrow{u} + (a+b)\overrightarrow{v} + (b+c)\overrightarrow{w} = 0.$$

Ma essendo a, b, c non tutti nulli, almeno uno dei coefficienti $a{+}c, a{+}b, b{+}c$ è diverso da zero. Questo, però, è impossibile, perchè per ipotesi $\{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\}$ sono tre vettori linearmente indipendenti. Quindi, $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}; \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\}$ sono vettori linearmente indipendenti.

- 2) $Im\,(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$. Quindi, $Im\,(A) = \{0\}$ oppure $Im\,(A) = \mathbb{R}$. Poichè $A \neq 0$, $Im\,(A) = \mathbb{R}$. Poichè

$$dim\,(V) = dim\,(Im\,(A)) + dim(ker(A)), \text{ e } dim\,(Im\,(A)) = 1,$$

si ottiene che

$$dim(ker(A)) = dim\,(V) - 1.$$

- 3) Siano $n = dim(V)$ e $m = dim\,(W)$. Poichè $ker\,(A) = \{0\}$, $dim(Im(A)) = dim(V) = n$. Sia $\{v_1; v_2; ...; v_n\}$ una base di V. Se si definisce

$$w_1 = A\,(v_1)\,;\; w_2 = A\,(v_2);\; ...\;;\; w_n = A\,(v_n),$$

allora $\{w_1; w_2; ...; w_n\}$ è una base di $Im(A)$, perchè $Im(A)$ e V hanno la stessa dimensione. Estendo $\{w_1; w_2; ...; w_n\}$ ad una base $\{w_1; w_2; ...; w_n; w_{n+1}; ...; w_m\}$ dell'intero spazio W (in virtù del teorema di completamento della base). Allora definisco l'applicazione B nel seguente modo:

$$\begin{gathered} B\,(a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_nw_n + a_{n+1}w_{n+1} + ... + a_mw_m) = \\ = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, \\ \forall\; a_1; a_2; ...; a_m \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

In particolare,

$$B\,(w_1) = v_1;\; B\,(w_2) = v_2;\; ...\;;\; B\,(w_n) = v_n;\; B\,(w_{n+1}) = 0;\; ...\;;\; B\,(w_m) = 0.$$

Si vede subito che B è lineare; inoltre, B soddisfa la relazione $B \circ A = Id_V$.

ATTENZIONE!

Si osservi che, in generale, $A \circ B$ NON E' L'IDENTITA' SU W. B è suriettiva, ma non iniettiva, tranne quando A e B hanno la stessa dimensione.

- 4) Siano $n = dim(V)$ e $m = dim\,(W)$. Sia $\{v_1; v_2; ...; v_r\}$ una base di $ker\,(V)$. $r = n - m$, perchè

$$dim\,(ker\,(A)) = dim\,(V) - dim\,(Im\,(A)) = n - dim\,(W) = n - m.$$

Estendo $\{v_1; v_2; ...; v_{n-m}\}$ ad una base $\{v_1; v_2; ...; v_{n-m}; v_{n-m+1}; ...; v_n\}$ dell'intero spazio V (in virtù del teorema di completamento della base). Definisco poi

$$w_1 = A\,(v_{n-m+1})\,;\ w_2 = A\,(v_{n-m+2});\ ...\ ;\ w_m = A\,(v_n).$$

Si noti che

$$A\,(v_1) = 0;\ A\,(v_2) = 0;\ ...\ ;\ A\,(v_{n-m}) = 0.$$

Scelgo allora l'applicazione B nel seguente modo:

$$\begin{gathered} B\,(a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... a_m w_m) = \\ = a_1 v_{n-m+1} + a_2 v_{n-m+2} + ... + a_m v_n, \\ \forall\ a_1; a_2; ...; a_m \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

In particolare,

$$B\,(w_1) = v_{n-m+1};\ B\,(w_2) = v_{n-m+2};\ ...\ ;\ B\,(w_m) = v_n.$$

Si vede subito che B è lineare; inoltre, B soddisfa la relazione $B \circ A = Id_W$.

ATTENZIONE!

Si osservi che, in generale, $B \circ A$ NON E' L'IDENTITA' SU W. B è iniettiva, ma non suriettiva, tranne quando A e B hanno la stessa dimensione.

- 5) Suppongo che $B \circ A = 0$, e scelgo $w \in Im(A)$. Allora, esiste $v \in V$ tale che $A\,(v) = w$. Ma

$$B\,(A\,(v)) = B\,(w) = 0,$$

perchè $B \circ A = 0$. Quindi, $w \in ker(B)$.

Viceversa, se $Im(A)$ è un sottospazio di $ker(B)$, allora, $\forall v \in V$, $A\,(v) \in ker(B)$. Così, $B\,(A\,(v)) = 0$ e $B \circ A = 0$.

Se $B \circ A = 0$, allora $Im(A)$ è un sottospazio di $ker(B)$, e così

$$dim(Im(A)) \leq dim(ker(B)).$$

Ma dim(W) =dim$(ker(B)) + dim(Im(B))$,
e dunque

$$dim(Im(A)) + dim(Im(B)) \leq dim(W).$$

- 6) Siano U il nucleo di A e U' il nucleo di kA. Dimostro che $U = U'$ provando dapprima che $U \subseteq U'$ e poi che $U' \subseteq U$.

Se $v \in U$, allora $A(v) = 0$; da cui $kA(v) = (kA)(v) = 0$. Quindi, $v \in U'$ e si vede così che $U \subseteq U'$.
Viceversa,
se $v' \in U'$, allora $(kA)(v') = 0$; da cui

$$kA(v') = 0, \text{ e, dividndo per } k,$$
$$k \cdot \tfrac{1}{k}(A)(v') = A(v') = 0. \ (k \neq 0).$$

Quindi, $v' \in U$ e si vede così che $U' \subseteq U$.
Siano Z l'immagine di A e Z' l'immagine di kA. Dimostro che $Z = Z'$ provando dapprima che $Z \subseteq Z'$ e poi che $Z' \subseteq Z$.

Se $w \in Z$, allora $\exists\ v \in V$ tale che $A(v) = w$; ma allora

$$A(v) = k \cdot A\left(\tfrac{1}{k}v\right) = (kA)\left(\tfrac{1}{k}v\right) = w.$$

w sta anche nell'immagine di kA, perchè $(kA)\left(\frac{1}{k}v\right) = w$, dunque si vede che $Z \subseteq Z'$.
Viceversa,
se $w' \in Z'$, allora $\exists\ v' \in V'$ tale che $(kA)(v') = w'$; ma allora

$$\tfrac{1}{k}(kA)(kv') = \tfrac{1}{k} \cdot k \cdot A(kv') = (A)(v') = w'.$$

w' sta anche nell'immagine di A, perchè $(A)(kv') = w'$, dunque si vede che $Z' \subseteq Z$.

- 7) Siano A e B due matrici quadrate simili $n \times n$, e sia P la matrice invertibile $n \times n$ tale che $P^{-1}AP = B$.

Allora,

$$
\begin{aligned}
P^{-1}A^nP = P^{-1}A\left(P \cdot P^{-1}\right)AP \cdot ... \cdot P^{-1}AP = \\
= (P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}AP) \cdot ... \cdot (P^{-1}AP) = \\
= B^n.
\end{aligned}
$$

Dunque, anche A^n e B^n sono simili.

Se A è invertibile, sia P la matrice invertibile $n \times n$ tale che $P^{-1}AP = B$; si vede subito che

$$B^{-1} = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

Perciò, anche B è invertibile e le matrici A^{-1} e B^{-1} sono simili.

- 8) Sviluppo il determinante partendo dall'ultima colonna e procedendo a ritroso fino all'$(m+1)$-esima colonna. Trovo

Siano A una matrice $m \times m$; C una matrice $n \times m$, e I la matrice unità $n \times n$. Allora,

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{1;1} & ... & a_{1;m} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m;1} & ... & a_{m;m} & 0 & ... & 0 \\ c_{1;1} & ... & c_{1;m} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n;1} & ... & c_{n;m} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \\
= 1 \cdot det\begin{pmatrix} a_{1;1} & ... & a_{1;m} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m;1} & ... & a_{m;m} & 0 & ... & 0 \\ c_{1;1} & ... & c_{1;m} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n-1;1} & ... & c_{n-1;m} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \\
= 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot det(A) = det(A).
\end{aligned}
$$

Analogamente, si vede che:

$$det\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & A \end{pmatrix} = det(A).$$

In questo caso si sviluppa il determinante partendo dalla prima colonna e procedendo in avanti.

- 9) Poichè A è una matrice reale, anche il suo determinante dovrebbe essere reale. Ma, essendo $A^2 = B$,

$$\begin{gathered} det\,(A\cdot A) = det\,(B) < 0, \\ det\,(A)\cdot det\,(A) < 0, \\ (det\,(A))^2 < 0, \end{gathered}$$

e questo è impossibile. Ne segue che la matrice A richiesta non può esistere.

- 10) Sia A una matrice reale invertibile tale che ${}^t(A) = A^{-1}$. Allora,

$$\begin{gathered} (A\cdot{}^t(A)) = Id., \\ det\,(A\cdot{}^t(A)) = det\,(A)\cdot det\,({}^t(A)) = 1. \end{gathered}$$

Ma A e ${}^t(A)$ hanno lo stesso determinante, per cui

$$(det\,(A))^2 = 1.$$

Essendo A una matrice reale, si ricava che $det\,(A) = \pm 1$.

- 11) Se A è una matrice a coefficienti interi, anche il suo determinante è un numero intero (essendo dato da somme e prodotti di numeri interi). Per lo stesso motivo anche il determinante di A^{-1} è un numero intero. Pertanto,

$$\begin{gathered} (A\cdot A^{-1}) = I \text{ implica} \\ det(A)\cdot det(A^{-1}) = 1, \text{ cioè} \\ det(A) = \tfrac{1}{det(A^{-1})}. \end{gathered}$$

Gli unici numeri interi il cui reciproco è un numero intero sono $+1$ e -1, dunque $det(A) = \pm 1$.

- 12) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_{n\times n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. (Provare ad eseguire esplicitamente la moltiplicazione!). Allora,

$$\begin{gathered} det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_{n\times n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right) = \\ = det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_{n\times n} \end{pmatrix} \cdot det\begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \\ = det(A)\cdot det\,(D). \text{ (Vedere il problema n.8).} \end{gathered}$$

Analogamente si può verificare che

$$det\begin{pmatrix} D & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = det(A)\cdot det(D).$$

- 13) Sia A una matrice $n\times n$, e sia r un autovalore di A, a cui è associato un autovettore v. Allora

$$\begin{gathered} A^k \cdot v = (A\cdot A\cdot ...\cdot A)\cdot v \quad (k \text{ volte}) \\ = (A\cdot A\cdot ...\cdot A)\,(Av) \ (k-1 \text{ volte}) \\ = (A\cdot A\cdot ...\cdot A)\,(rv) \ (k-1 \text{ volte}) \\ = r\cdot (A\cdot A\cdot ...\cdot A)\,(v) \ (k-1 \text{ volte}) \\ = r\cdot (A\cdot A\cdot ...\cdot A)\,(Av) \ (k-2 \text{ volte}) \\ = ... = A\left(r^{k-1}v\right) = r^{k-1}A\,(v) = r^k. \end{gathered}$$

Dunque, v è un autovettore di A^k con autovalore associato r^k.
Se A è invertibile, ed $r \neq 0$,

$$\begin{gathered} A^{-1}\,(v) = A^{-1}\left(\frac{1}{r}\cdot rv\right) = \frac{1}{r}A^{-1}\,(Av) = \\ = \frac{1}{r}\,(A^{-1}A)\,v = \frac{1}{r}v. \end{gathered}$$

Pertanto, v è un autovettore di A^{-1} con autovalore associato $\frac{1}{r}$.

- 14) Sia A una matrice quadrata $n\times n$, e sia μ un suo autovalore. Sia r la molteplicità geometrica di tale autovalore, e sia $\{v_1; v_2; ...; v_r\}$ una base del suo autospazio. In virtù del teorema di completamento della base, è possibile estenderla ad una base $\{v_1; v_2; ...; v_n\}$ di tutto $\mathbb{R}^n$.

Passando alla nuova base, osserviamo che A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Qualcos'altro} \end{pmatrix}. \ (\mu \text{ compare nelle prime } r \text{ righe}).$$

Poichè matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, si deduce che il polinomio caratteristico di A è

$$(\lambda-\mu)^r\cdot(\text{Altro}\,(\lambda)),$$

quindi l'autovalore μ ha molteplicità algebrica non inferiore ad r.

- 15) Sia V uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto interno, e siano $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ due vettori tali che $\langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{v} \rangle$. Allora

$$\langle \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle =$$

$$\begin{gathered} = \langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle = \\ = \langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} \rangle - \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{v} \rangle = \\ = \langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} \rangle = 0. \end{gathered}$$

Allora, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sono ortogonali.

- 16) Sia V uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto interno. Siano $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; ...; \overrightarrow{v_n}\}$ vettori non nulli di V tali che $\langle \overrightarrow{v_i}; \overrightarrow{v_j} \rangle = 0$, per ogni $i \neq j$, e suppongo per assurdo che $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; ...; \overrightarrow{v_n}\}$ siano linearmente dipendenti. Allora, esistono $a'_1; a'_2; ...; a'_n \in \mathbb{R}$ non tutti contemporaneamente nulli tali che

$$a'_1\overrightarrow{v_1} + a'_2\overrightarrow{v_2} + ... + a'_n\overrightarrow{v_n} = 0.$$

Suppongo, per esempio, che $a'_n \neq 0$. Dividendo per a'_n, e ponendo

$$a_1 = \tfrac{a'_1}{a'_n};\ a_2 = \tfrac{a'_2}{a'_n}; ....; a_{n-1} = \tfrac{a'_{n-1}}{a'_n},$$

posso scrivere

$$v_n = -\ a_1\overrightarrow{v_1} - a_2\overrightarrow{v_2} - ... - a_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}}.$$

Così,

$$\begin{gathered} \langle v_n; v_n \rangle = \langle v_n; -a_1\overrightarrow{v_1} - a_2\overrightarrow{v_2} - ... - a_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}} \rangle = \\ = -a_1 \langle v_n; v_1 \rangle - a_2 \langle v_n; v_2 \rangle - ... - a_{n-1} \langle v_n; v_{n-1} \rangle = 0. \end{gathered}$$

Questo è impossibile, perchè il prodotto interno è definito positivo. Dunque, $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; ...; \overrightarrow{v_n}\}$ sono linearmente indipendenti.

- 17) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita munito di un prodotto interno (bilineare, simmetrico e definito positivo), e sia $T : U \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare.

Sia $\left\{\overrightarrow{v_1'}; \overrightarrow{v_2'}; ...; \overrightarrow{v_n'}\right\}$ una sua base. Utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, ci possiamo ricondurre ad una base ortonormale di V, $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; ...; \overrightarrow{v_n}\}$. Allora, si pone

$$\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + ... + a_n\overrightarrow{v_n},$$

dove

$$a_1 = T\left(\overrightarrow{v_1}\right);\ a_2 = T\left(\overrightarrow{v_2}\right);\ ...;\ a_n = T\left(\overrightarrow{v_n}\right).$$

$\forall\ \overrightarrow{v} \in V$, sia

$$\overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{v_1} + b_2\overrightarrow{v_2} + ... + b_n\overrightarrow{v_n}.$$

Allora,

$$\begin{gathered}\langle\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = \\ = T\left(\overrightarrow{v_1}\right)b_1 + T\left(\overrightarrow{v_2}\right)b_2 + ... + T\left(\overrightarrow{v_n}\right)b_n = \\ = T\left(\overrightarrow{v}\right).\end{gathered}$$

- 18) Siano A e B matrici nilpotenti che commutano, cioè tali che $AB = BA$. Allora esistono un numero naturale p tale che $A^p = 0$ ed un numero naturale q tale che $B^q = 0$. Ma se $s \geq p + q$, $(A + B)^s$ si può scrivere come somma di un certo numero di addendi, ciascuno dei quali è della forma

$$A^{n_1} \cdot B^{n_2},\ \text{con}\ n_1 + n_2 = s.$$

Ciò accade perchè A e B commutano, e quindi in qualunque prodotto del tipo $ABAABABB...$ si possono scrivere i fattori "A" all'inizio. Poichè $s = p + q$, deve essere vero o che $n_1 \geq p$ oppure che $n_2 \geq q$. In entrambi i casi,

$$A^{n_1} \cdot B^{n_2} = 0,$$

e così anche $(A + B)^s = 0$, $\forall\ s \geq p + q$.

Sia poi $r \geq min\,\{p; q\}$. Allora, $(AB)^r = A^rB^r$ (per la commutatività) e deve essere vero o che $r \geq p$ oppure che $r \geq q$. In entrambi i casi,

$$A^r \cdot B^r = 0,$$

e così anche $(AB)^r = 0$, $\forall\ r \geq min\,\{p; q\}$.

- 19) Sia A una matrice quadrata nilpotente $n \times n$. Sia $\overrightarrow{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$con $A^k\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$ ma $A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right) \neq 0$. Deve essere ovviamente $A^h\overrightarrow{v} \neq 0$, per ogni $h < k$. Suppongo, per assurdo, che $\left\{\overrightarrow{v}; A\left(\overrightarrow{v}\right); A^2\left(\overrightarrow{v}\right); ...; A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right)\right\}$ siano linearmente dipendenti. Allora, esisterebbero a_0;a_1; a_2; ...; $a_{k-1} \in \mathbb{R}$ non tutti contemporaneamente nulli tali che

$$a_0\overrightarrow{v} + a_1 A\left(\overrightarrow{v}\right) + a_2 A^2\left(\overrightarrow{v}\right) + ...a_{k-1}A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right) = 0.$$

Se $a_0 \neq 0$, allora potrei scrivere $\overrightarrow{v}$ come combinazione lineare di $\left\{A\left(\overrightarrow{v}\right); A^2\left(\overrightarrow{v}\right); ...; A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right)\right.$ Questo non sarebbe possibile, perchè da una parte sappiamo che $A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right) \neq 0$, mentre d'altronde troveremmo che $A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right) = A^{k-1}\left(-\frac{a_1}{a_0}A\overrightarrow{v} - ... - \frac{a_{k-1}}{a_0}A^{k-1}\overrightarrow{v}\right) = 0$ (dato che $A^k\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$). Dunque, $a_0 = 0$.

Se, a questo punto, $a_1 \neq 0$, allora potrei scrivere $A\overrightarrow{v}$ come combinazione lineare di $\left\{A^2\left(\overrightarrow{v}\right); ...; A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right)\right\}$. Questo non sarebbe possibile, perchè da una parte sappiamo che $A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right) \neq 0$, mentre d'altronde troveremmo che $A^{k-1}\left(\overrightarrow{v}\right) = A^{k-2}\left(-\frac{a_2}{a_1}A^2\overrightarrow{v} - ... - \frac{a_{k-1}}{a_1}A^{k-1}\overrightarrow{v}\right) = 0$ (dato che $A^k\left(\overrightarrow{v}\right) = 0$). Dunque, $a_1 = 0$. Procedendo in questo modo, si trova l'assurdo, perchè i coefficienti a_i devono essere tutti nulli.

- 20) Indicherò, per brevità, $A \sim B$ se A e B sono simili.

(proprietà riflessiva) $A \sim A$, perchè $A = \left(I^{-1}\right)AI$.

(proprietà simmetrica) Se $A \sim B$ esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = B$. Allora, $PBP^{-1} = A$, da cui $A = \left(P^{-1}\right)^{-1}B\left(P^{-1}\right)$. Dunque, $B \sim A$.

(proprietà transitiva) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, esistono matrici invertibili P e Q tali che $P^{-1}AP = B$ e $Q^{-1}BQ = C$. Di conseguenza,

$$\begin{gathered} Q^{-1}\left(B\right)Q = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q = \\ = \left(PQ\right)^{-1}A\left(PQ\right) = C. \end{gathered}$$

PQ è una matrice invertibile, tale che $\left(PQ\right)^{-1}A\left(PQ\right) = C$. Allora $A \sim C$.

- 21) Siano A e B due matrici tali che $det(ABA) = det\left(BAB\right)$.

Allora, $det(ABA) = det\left(BAB\right)$ implica

$$\begin{gathered} det(A)det(B)det(A) = det(B)det(A)det(B); \\ \left(det(A)\right)^2 det(B) = \left(det(B)\right)^2 det(A); \\ det(A) = det(B). \end{gathered}$$

- 22) Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A^2 \cdot x = 2A \cdot x - 1$, per ogni vettore colonna x di dimensione n. Sia $\overrightarrow{v}$ un suo autovettore, associato ad un dato autovalore λ. Allora,

$$
\begin{gathered}
A^2 \cdot \overrightarrow{v} - 2A \cdot \overrightarrow{v} + 1 = 0; \\
A\left(\lambda \overrightarrow{v}\right) - 2\lambda \overrightarrow{v} + 1 = 0; \\
(\lambda)^2 \overrightarrow{v} - 2\lambda \overrightarrow{v} + 1 = 0; \\
(\lambda - 1)^2 \overrightarrow{v} = 0.
\end{gathered}
$$

Da ciò si deduce che l'unico valore ammissibile per λ è 0, dato che un auovettore non può mai essere nullo.

- 23) Interpreto v e w come vettori colonna.Suppongo che $Av = \alpha v$ e $Aw = \beta w$, con $\alpha \neq \beta$.

${}^t(v)\, Aw$ è una matrice 1×1, dunque è ovviamente simmetrica:

$$
{}^t(v)\,(Aw) = {}^t(w)\,\left({}^tA\right) w = {}^t(w)\,(Av).
$$

Ma allora,

$$
{}^t(v)\,\beta w = \beta \cdot \left({}^t(v)\right) \cdot w = \left({}^t(w)\right) \alpha v = \alpha \cdot \left({}^t(w)\right) \cdot v.
$$

Ma $\left({}^t(v)\right) \cdot w = \left({}^t(w)\right) \cdot v$, per cui $(\alpha - \beta) \cdot \left(\left({}^t(v)\right) \cdot w\right) = 0$. $\alpha - \beta \neq 0$ perchè α e β sono distinti e così deve essere $\left(\left({}^t(v)\right) \cdot w\right) = 0$.

Ma questo è proprio il prodotto scalare standard di v e w che, pertanto, devono essere ortogonali.