1 Distanze.

a)

- $d(x;y) = 0$ se e solo se $d_1(x;y) = d_2(x;y) = 0$, dato che entrambe le distanze hanno valori positivi. Ma questo è possibile solo se $x = y$.
- $d(y;x) = d_1(y;x) + d_2(y;x) = d_1(x;y) + d_2(x;y) = d(x;y)$.
- Siano $x; y; z \in X$. Si ha:

$$\begin{gathered} d(x;z) = d_1(x;z) + d_2(x;z) \leq \\ \leq d_1(x;y) + d_1(y;z) + d_2(x;y) + d_2(y;z) = \\ d_1(x;y) + d_2(x;y) + d_1(y;z) + d_2(x;y); \end{gathered}$$

e quindi:

$$d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z).$$

Dunque, $d(x;y)$ è una distanza su X.

b) d^2 non è una distanza: ad esempio, se $d(x;y) = |x-y|$ è la distanza euclidea su $\mathbb{R}$, d^2 non è una distanza, perchè non soddisfa la disuguaglianza triangolare. Basta prendere $x = -5$; $y = 0$; $z = 5$ e vedere che:

$$d^2(x;z) = (10)^2 = 100,$$

mentre

$$d^2(x;y) + d^2(y;z) = \left(5^2\right) + (5)^2 = 50.$$

2 Connessione e compattezza.

A_1 è $\left\{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : x > 0\right\} \cup \left\{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 : x < 0\right\}$, quindi è sconnesso.

A_2 è $\mathbb{R}^4$ privato di un sottospazio di dimensione 2, e quindi è connesso (si potrebbe "immaginare" questo spazio come $\mathbb{R}^3$ privato di una retta, che si "prolunga" per tutta la quarta dimensione). Infatti, la proiezione di A_2 sul piano $w = 0$ è proprio $\mathbb{R}^3$ privato di una retta, e w può assumere qualsiasi valore.

A_3 è $\mathbb{R}^4$ privato di un sottospazio di dimensione 1 (retta), e quindi è connesso.

A_4 è $\mathbb{R}^4$ privato di un punto, e quindi è connesso.

$C_1 = \left\{(0;y;z;w) \in \mathbb{R}^4\right\}$;

$C_2 = \left\{(0;0;z;w) \in \mathbb{R}^4\right\}$;

$C_3 = \left\{(0;0;0;w) \in \mathbb{R}^4\right\}$

$C_1; C_2$ e C_3 non sono compatti, perchè sono illimitati (w può assumere qualsiasi valore). C_4 è compatto, perchè è un punto (l'origine $(0;0;0;0)$).

3 Forme bilineari.

Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt partendo dalla base

$$\{(1;0;0)\,;(0;1;0)\,;(0;0;1)\}.$$

Si ha:
$\overrightarrow{w_1} = (1;0;0)$.
$\overrightarrow{w_2} = (0;1;0) - \dfrac{g_C\left((0;1;0)\,;\overrightarrow{w_1}\right)}{g_C\left(\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_1}\right)}\overrightarrow{w_1}$.
$g_C\left((0;1;0)\,;\overrightarrow{w_1}\right) = (0;1;0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$
$g_C\left(\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_1}\right) = (1;0;0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$
Alla fine, $\overrightarrow{w_2} = \left(-\dfrac{1}{2};1;0\right)$.
$\overrightarrow{w_3} = (0;0;1) - \dfrac{g_C\left((0;0;1)\,;\overrightarrow{w_1}\right)}{g_C\left(\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_1}\right)}\overrightarrow{w_1} - \dfrac{g_C\left((0;0;1)\,;\overrightarrow{w_2}\right)}{g_C\left(\overrightarrow{w_2};\overrightarrow{w_2}\right)}\overrightarrow{w_2} =$
$= (0;0;1) - \overrightarrow{0} - \overrightarrow{0} = (0;0;1)$.
Dunque, si trova

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) ${}^t(P) \cdot C \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dunque, la forma bilineare è definita positiva (oltre che simmetrica), e quindi è un prodotto scalare.

c) Dividendo ciascun vettore $\{\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_3};\overrightarrow{w_3}\}$ per la sua lunghezza (rispetto alla forma bilineare g_c), si trova la base cercata:
$\|\overrightarrow{w_1}\| = \sqrt{g_C\left(\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_1}\right)} = \sqrt{2}$;
$\|\overrightarrow{w_2}\| = \sqrt{g_C\left(\overrightarrow{w_2};\overrightarrow{w_2}\right)} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$;
$\|\overrightarrow{w_3}\| = \sqrt{g_C\left(\overrightarrow{w_3};\overrightarrow{w_3}\right)} = \sqrt{2}$.
La base cercata è:
$\left\{\dfrac{\overrightarrow{w_1}}{\sqrt{2}};\sqrt{\dfrac{2}{3}}\overrightarrow{w_2};\dfrac{\overrightarrow{w_3}}{\sqrt{2}}\right\}$.

4 Curve.

4.1 Problema 1.

$\gamma'(t) = (1;2;2t)$, quindi la curva è regolare.

$\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{\gamma'}}{\|\gamma'\|} = \dfrac{(1;2;2t)}{\sqrt{5+4t^2}}$.
$\gamma''(t) = (0;0;2)$.
$\gamma'''(t) = (0;0;0)$.
Dato che $\tau(t) = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{\gamma'} \wedge \overrightarrow{\gamma''}; \overrightarrow{\gamma'''} \right\rangle}{\left(\left\| \overrightarrow{\gamma'} \wedge \overrightarrow{\gamma''} \right\|\right)^2}$, deve essere $\tau = 0$, cioè la curva è piana.

$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (4;-2;0)$. Dunque, $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{\gamma'} \wedge \overrightarrow{\gamma''}}{\left\| \overrightarrow{\gamma'} \wedge \overrightarrow{\gamma''} \right\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right)$.

Infine,
$\kappa(t) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''} \right\|}{\|\alpha'\|^3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{(5+4t^2)\sqrt{5+4t^2}}$.
Si vede subito, senza ricorrere al calcolo del piano osculatore, che la seconda coordinata di $\gamma(t)$ è il doppio della prima, e quindi γ giace sul piano $y = 2x$ (la curva è una parabola!).

4.2 Problema 2.

$\delta(s) = T_\gamma(s)$, dove $T\gamma$ è il vettore tangente alla curva γ. $\delta'(s) = \dfrac{d\overrightarrow{T_\gamma}}{ds} = \kappa(s)\overrightarrow{N_\gamma}$, dove

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\overrightarrow{T_\gamma}}{ds} \right\| = \|\delta'(s)\| = v(s).$$

Si osservi, in particolare, che s **non è l'ascissa curvilinea di** δ.

5 Superfici.

Abbiamo

$$\overrightarrow{\alpha_u(u;v)} = (1;1;v);$$
$$\overrightarrow{\alpha_v(u;v)} = (1;-1;u).$$

$\left\langle \overrightarrow{\alpha_u(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_u(u;v)} \right\rangle = 2 + v^2$;
$\left\langle \overrightarrow{\alpha_u(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_v(u;v)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\alpha_v(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_u(u;v)} \right\rangle = uv$;
$\left\langle \overrightarrow{\alpha_v(u;v)}; \overrightarrow{\alpha_v(u;v)} \right\rangle = 2 + u^2$.
Dunque, la matrice associata alla prima forma fondamentale rispetto alla base $\{\overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_v}\}$ è:

$$G = \begin{pmatrix} 2+v^2 & uv \\ uv & 2+u^2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il vettore normale:

$$\overrightarrow{\alpha_u} \wedge \overrightarrow{\alpha_v} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{pmatrix} =$$
$$= (u+v; v-u; -2) \, .$$

Di conseguenza,

$$\overrightarrow{N} = \frac{(u+v; v-u; -2)}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}}.$$

Ora, calcoliamo gli elementi della seconda forma fondamentale.
$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial u}} = (0;0;0).$
$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial v}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_v}{\partial u}} = (0;0;1).$
$\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial \alpha_v}{\partial v}} = (0;0;0).$
$b_{11} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}} \right\rangle = 0.$
$b_{12} = b_{21} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v \partial u}} \right\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}}.$
$b_{22} = -\left\langle \overrightarrow{N}; \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}} \right\rangle = 0.$
Alla fine,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}} \\ \frac{2}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$det\,(G) = 4 + 2u^2 + 2v^2.$$

e

$$det\,(B) = -\frac{4}{4+2u^2+2v^2}.$$

Quindi,

$$K\,(u;v) = -\frac{4}{(4+2u^2+2v^2)^2}.$$

Nel punto $(0;0;0)=\alpha(0;0)$, si ha: $K(0;0)=-\dfrac{1}{4}$. Il punto $(0;0;0)$ è dunque iperbolico.

Nel punto $(2;0;1)=\alpha(1;1)$, si ha:

$$G=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$
$$G^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix};$$
$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

$L=BG^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{16}\sqrt{2} & \frac{3}{16}\sqrt{2} \\ \frac{3}{16}\sqrt{2} & -\frac{1}{16}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Gli autovalori di questa matrice sono le curvature principali nel punto $(2;0;1)$, e valgono $-\dfrac{1}{4}\sqrt{2}$ e $\dfrac{1}{8}\sqrt{2}$. La curvatura media vale $H=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}\sqrt{2}\right)=-\dfrac{1}{16}\sqrt{2}$.

6 Geometria analitica.

a) La matrice dei coefficienti è

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice della parte quadratica è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=2$. Il cambiamento di coordinate che diagonalizza A è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}.$$

In queste coordinate l'equazione della quadrica diventa

$$\bar{X}^2+4\bar{Y}^2+2\bar{Z}^2+4\bar{Z}+1=0.$$

Completando i quadrati si ottiene l'equazione canonica

$$X^2+4Y^2+2Z^2-1=0,$$

dove

$$\begin{cases} X = \bar{X} \\ Y = \bar{Y} \\ Z = \bar{Z} + 1. \end{cases}$$

La quadrica è quindi un ellissoide. Il cambiamento dalle coordinate (x, y, z) alle coordinate (X, Y, Z) è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

b) Si ricava facilmente (sostituendo) che nelle coordinate (X, Y, Z) il piano π ha equazione

$$Z = \frac{1}{2}.$$

c) Nelle coordinate canoniche $E = \pi \cap Q$ è data da

$$\begin{cases} Z = \frac{1}{2} \\ X^2 + 4Y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi E è un ellisse.

d) Gli assi di E hanno lunghezza $\sqrt{2}$ e $1/\sqrt{2}$.