# Esempio di prova scritta.

Tempo: 2h+30 min.

1.) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, si consideri la forma bilineare $g_A$ su $\mathbb{R}^3$ ad essa associata.

§ Trovare una matrice invertibile $P$ tale che ${}^t(P)\,AP$ sia diagonale.

§ La forma bilineare $g_A$ è simmetrica? E' definita positiva?

§ Esiste una matrice ortogonale reale $O$ tale che $O^{-1}AO$ sia diagonale? Se sì, perchè?

2.) Considerare la curva $\gamma : \left(\frac{1}{2}; 3\right) \longmapsto \mathbb{R}^3$,
$\gamma(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}; 1+t; \frac{1-t}{t}\right)$.

§ La curva è regolare?

§ Scrivere il sistema di riferimento di Frenet-Serre, e trovare curvatura e torsione in ogni punto.

§ Dimostrare che la curva giace su un piano, e ricavare l'equazione di esso.

3.) Data la superficie $\alpha : (0; 2\pi) \times (0; 2\pi) \longmapsto \mathbb{R}^3$,
$\alpha(u; v) = \left(au\,(cos\,(v)); bu\,(sin\,(v)); u^2\right)$,
dove $a$ e $b$ sono due numeri reali qualsiasi non nulli,

§ Scrivere la prima e la seconda forma fondamentale, le curvature principali, la curvatura media e la curvatura Gaussiana.

§ Dimostrare che i paralleli, ovvero le curve $t \longmapsto \left(au_0\,(cos\,(t)); bu_0\,(sin\,(t)); u_0^2\right)$ con $u_0 \in (0; 2\pi)$ fissato, hnno curvatura geodetica costante.

4.) Dati gli insiemi $A = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\right\}$ e $B = A \setminus \{(0; 0; 0)\}$ ($B$ è $A$ privato dell'origine),

§ dire se $A$ è connesso e/o compatto rispetto alla metrica euclidea in $\mathbb{R}^3$;

§ dire se $B$ è connesso e/o compatto rispetto alla metrica euclidea in $\mathbb{R}^3$.

5.) Siano $(X; d_X)$ e $(Y; d_Y)$ due spazi metrici. Sul loro prodotto cartesiano $X \times Y$ si definisca la distanza

$$d_2\left((x_1;y_1);(x_2;y_2)\right)=\sqrt{\left(d_X\left(x_1;x_2\right)\right)^2+\left(d_Y\left(y_1;y_2\right)\right)^2}.$$

§ Dimostrare che $d_2$ è una distanza su $X\times Y$.

§ Siano $U$ un aperto in $X$ e $V$ un aperto in $Y$. Dimostrare che $U\times V$ è aperto in $X\times Y$ rispetto alla distanza $d_2$. (Suggerimento: dimostrare che ogni punto di $U\times V$ è interno).