La sfera.

Fisso un punto $C = (a; b; c)$ nello spazio ed un numero $r > 0$. La SFERA di CENTRO C e RAGGIO r è l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno distanza r dal centro C.

Tale condizione significa che, se $P = (x; y; z)$ è un generico punto dello spazio,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r;$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0.$$

Quest'ultima si dice EQUAZIONE della SFERA di CENTRO C e RAGGIO r.

L'equazione generale della sfera ha la forma:

$$\varphi x^2 + \varphi y^2 + \varphi z^2 + \chi x + \psi y + \varrho z + \omega = 0,\ \varphi \neq 0.$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + \tfrac{\chi}{\varphi} x + \tfrac{\psi}{\varphi} y + \tfrac{\varrho}{\varphi} z + \tfrac{\omega}{\varphi} = 0.$$

Posto $\alpha = \frac{\chi}{\varphi}$; $\beta = \frac{\psi}{\varphi}$; $\gamma = \frac{\varrho}{\varphi}$; $\delta = \frac{\omega}{\varphi}$, l'equazione della sfera assume la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Il centro è $C = \left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}; -\frac{\gamma}{2}\right)$, il raggio è $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta}$, a patto che $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta \geq 0$.

Se quest'ultima condizione non fosse verificata, allora la superficie rappresenterebbe l'insieme vuoto.

Una CIRCONFERENZA nello spazio si rappresenta come intersezione di una sfera S e di un piano π, tale che la distanza del centro C da π sia minore del raggio r.

Quindi, $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$ rappresenta l'equazione di una circonferenza, se l'intersezione non è vuota.

ESERCIZI.

1) Scrivere l'equazione della sfera di centro $C = (1; 0; 2)$ e raggio $r = 3$.

2) Scrivere l'equazione della sfera di centro $C = (1; 0; 2)$ e tangente alla retta $\begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = t + 2 \end{cases}$.

3) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $x - 2z + 3 = 0$ nel punto $A = (1; -1; 2)$ e passante per il punto $B = (0; 1; 2)$.

4) Scrivere l' equazione della sfera tangente alla retta $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ nel punto $P = (-2; 2; 1)$ e passante per i punti $A = (1; 2; 0)$ e $B = (3; 0; 2)$.

5) Scrivere l'equazione della sfera tangente all'asse z nel punto $A = (0; 0; 1)$ e tangente nel punto $B = (0; 1; -1)$ alla retta $\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$.

6) Scrivere l'equazione della retta tangente alla sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - z - 7 = 0$ nel punto $P = (1; -1; 2)$ e ortogonale alla retta $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = 3 \end{cases}$.

7) Si consideri la circonferenza σ di equazioni $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$. Determinare il centro ed il raggio di σ, e scrivere le equazioni della retta tangente alla circonferenza nel punto $A = (2; 0; 1)$.

8) Scrivere le equazioni della circonferenza σ passante per i punti $A = (0; 1; 0)$; $B = (2; 0; 0)$ e $C = (0; 0; 3)$.

9) Dato il punto $C = (0; -2; 1)$ e la retta $s : \begin{cases} x = t \\ y = -3 \\ z = t + 5 \end{cases}$, determinare:

a) Le equazioni della circonferenza σ di centro C e tangente ad s.

b) Le equazioni della circonferenza σ_1 di centro C e che individua su s un segmento di lunghezza 2.

10) Date le rette $s_1 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$; $s_2 = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = t - 1 \end{cases}$, determinare le equazioni della circonferenza σ avente il centro su s_1 e tangente ad s_2 nel punto $A = (1; 1; -2)$.

11) Trovare la circonferenza tangente alla retta $r : \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$ nel punto $(1; -1; 1)$ e passante per $A = (2; 1; -1)$.

12) Trovare il centro ed il raggio della circonferenza di equazioni $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$

13) Scrivere l'equazione della sfera passante per i punti $A = (1;0;0)$; $B = (0;2;0)$ e $C = (0,0;2)$ e avente centro sul piano contenente A, B e C.

14) Scrivere l'equazione di tutte le sfere che individuano una circonferenza di raggio $r = 4$ sul piano $x+y-z = 0$ e che hanno centro sulla retta $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

15) Scrivere l'equazione della sfera tangente alla retta $\begin{cases} x - 2 = y \\ y = z \end{cases}$ nel punto $T = (2;0;0)$ e tangente alla retta $\begin{cases} y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ nel punto $S = (0;-1;0)$. Scrivere inoltre l'equazione del piano tangente a tale sfera nel punto T.

16) Scrivere l'equazione di tutte le sfere tangenti alla retta $\begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases}$ nel punto $O = (0;0;0)$ e passanti per il punto $A = (0;0;1)$.

17) Calcolare le equazioni del cerchio σ passante per i punti $O = (0;0;0)$; $A = (1;2;0)$ e $B = (1;-1;1)$. Trovarne il centro, il raggio e la retta tangente a tale circonferenza in A.

SOLUZIONI

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$.
2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$.
3) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 2y - 14z + 21 = 0$.
4) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - 7z + 4 = 0$.
5) $x^2 + y^2 + z^2 + 7x - 5y - 2z + 1 = 0$.
6) $\begin{cases} 3x - 4y + 3z - 13 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$.
7) Centro: $C = (1;2;2)$. Raggio: $r = \sqrt{6}$. Retta: $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$.
8) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 3z = 0 \\ 3x + 6y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$.
9) a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 4 = 0$.
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 5 = 0$.
10) $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 14 = 0 \end{cases}$.
11) La circonferenza giace sul piano $-4x + y - z + 6 = 0$. Il centro è $C = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}; -\frac{9}{4}\right)$, il raggio è $r = \sqrt{\frac{99}{8}}$.
12) Centro: $C = \left(\frac{13}{11}; \frac{20}{11}; -\frac{6}{11}\right)$. Raggio: $R = \sqrt{\frac{7}{11}}$.
13) $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y - \frac{5}{3}z - \frac{2}{3} = 0$.
14) $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2ty - 2tz - 16 - \frac{8}{3}t^2$.

15) $x^2 + y^2 + z^2 - 3y - z - 4 = 0$; $4x - 3y - z - 8 = 0$.
16) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + (2a - 1)\,y - z = 0$.
17) $\sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$. Tangente in A: $\begin{cases} 3x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$.