Esercizi laboratorio di Geometria 1A

1) Dimostrare che se $\{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\}$ sono tre vettori linearmente indipendenti, allora anche $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}; \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\}$ sono vettori linearmente indipendenti.

2) Sia $A : V \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora, se $A \neq 0$, $dim(ker(A)) = dim(V) - 1$.

3) Siano V e W due spazi vettoriali reali. Dimostrare che, se $A : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare tale che $ker\,(A) = \{0\}$, allora esiste un'applicazione lineare $B : W \longrightarrow V$ tale che $B \circ A$ sia l'identità su V.

4) Siano V e W due spazi vettoriali reali. Dimostrare che, se $A : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare tale che $Im\,(A) = W$, allora esiste un'applicazione lineare $B : W \longrightarrow V$ tale che $A \circ B$ sia l'identità su W.

5) Siano U ,V e W tre spazi vettoriali reali.
Dimostrare che, se $A : V \longrightarrow W$ e $B : W \longrightarrow U$ sono due applicazioni lineari, $B \circ A = 0$ se e solo se $Im(A)$ è un sottospazio di $ker(B)$. Dimostrare, inoltre, che se $B \circ A = 0$, allora $dim(Im(A)) + dim(Im(B)) \leq dim(W)$.

6) Siano V e W due spazi vettoriali reali. Dimostrare che, se $A : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare e se k è uno scalare reale non nullo, allora A e kA hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

7) Siano A e B due matrici quadrate SIMILI. Allora, per ogni intero positivo n, A^n e B^n sono due matrici simili. Dimostrare, inoltre, che se A è invertibile, anche B è invertibile e che le matrici A^{-1} e B^{-1} sono simili.

8) Siano A una matrice $m \times m$; C una matrice $n \times m$, e I la matrice unità $n \times n$. Allora,

$$det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_{1;1} & ... & a_{1;m} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m;1} & ... & a_{m;m} & 0 & ... & 0 \\ c_{1;1} & ... & c_{1;m} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n;1} & ... & c_{n;m} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = det(A).$$

e

$$det \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = det(A).$$

9) Dimostrare che se B è una matrice reale $n \times n$ e se $det(B) < 0$, allora non esiste alcuna matrice reale tale che $A^2 = B$.

10) Dimostrare che se A è una matrice REALE invertibile e se ${}^t(A) = A^{-1}$, allora $det(A) = \pm 1$.

11) Sia A una matrice invertibile tale che tutti i suoi coefficienti siano interi. Dimostrare che se tutti i coefficienti di A^{-1}sono interi, allora
$det(A) = \pm 1$.

12) Siano A una matrice $m \times m$; C una matrice $n \times m$, e D una matrice $n \times n$. Allora,

$$det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_{1;1} & ... & a_{1;m} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m;1} & ... & a_{m;m} & 0 & ... & 0 \\ c_{1;1} & ... & c_{1;m} & d_{1;1} & ... & d_{1;n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n;1} & ... & c_{n;m} & d_{n;1} & ... & d_{n;n} \end{pmatrix} = det(A) \cdot det\,(D)$$

e

$$det \begin{pmatrix} D & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = det(A) \cdot det(D).$$

13) Sia A una matrice $n \times n$. Dimostrare che se r è un autovalore di A, allora r^k è un autovalore di A^k per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre, se A è invertibile, ed $r \neq 0$, dimostrare che $\frac{1}{r}$ è un autovalore di A^{-1}.

14) Sia A una matrice quadrata, e sia μ un suo autovalore. Dimostrare che la molteplicità algebrica di tale autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità geometrica.

15) Sia V uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto interno (bilineare, simmetrico e definito positivo). Dimostrare che se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono due vettori tali che $\langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v}; \overrightarrow{v} \rangle$, allora $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sono ortogonali.

16) Sia V uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto interno (bilineare, simmetrico e definito positivo). Dimostrare che se $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; ...; \overrightarrow{v_n}\}$ sono vettori non nulli di V tali che $\langle \overrightarrow{v_i}; \overrightarrow{v_j} \rangle = 0$, per ogni $i \neq j$, allora $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; ...; \overrightarrow{v_n}\}$ sono linearmente indipendenti.

17) TEOREMA DI RIESZ.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita munito di un prodotto interno (bilineare, simmetrico e definito positivo). Dimostrare che, se $T : U \longrightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare, allora esiste un vettore $\overrightarrow{u} \in V$ tale che $T(\overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} \rangle$, $\forall \overrightarrow{v} \in V$.

18) Una matrice A si dice NILPOTENTE se esiste un intero $n > 0$ tale che $A^n = 0$. Se A e B sono matrici nilpotenti che commutano, cioè tali che $AB = BA$, allora $(A + B)$ e (AB) sono nilpotenti.

19) Sia A una matrice quadrata nilpotente $n \times n$. Dimostrare che se $0 \neq \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$; $A^k(\overrightarrow{v}) = 0$ ma $A^{k-1}(\overrightarrow{v}) \neq 0$, allora $\left\{ \overrightarrow{v}; A(\overrightarrow{v}); A^2(\overrightarrow{v}); ...; A^{k-1}(\overrightarrow{v}) \right\}$ sono linearmente indipendenti.

20) Dimostrare che la similitudine è una relazione di equivalenza tra le matrici $n \times n$ a coefficienti reali, ovvero che valgono le proprietà RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA.

21) Siano A e B due matrici tali che $det(ABA) = det(BAB)$. Dimostrare che $det(A) = det(B)$.

22) Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A^2 \cdot x = 2A \cdot x - 1$, per ogni vettore colonna x di dimensione n. Dimostrare che A può avere come autovalore SOLO $\lambda = 1$.

23) Sia A una matrice reale $n \times n$ **simmetrica.** Dimostrare che, se v e w sono due autovettori associati ad autovalori REALI e DISTINTI, allora v e w sono ortogonali (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$).