Le quadriche

Considero una quadrica di equazione $f(x;y;z)=0$. Poichè f è un polinomio di secondo grado, si può scrivere

$$f(x;y;z)=a_{1;1}x^2+2a_{1;2}xy+a_{2;2}y^2+2a_{1;3}xz+2a_{2;3}yz+a_{3;3}z^2+2a_{1;4}x+2a_{2;4}y+2a_{3;4}z+a_{4;4}=0.$$

La matrice

$$B=\begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{1;2} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{1;3} & a_{2;3} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{1;4} & a_{2;4} & a_{3;4} & a_{4;4} \end{pmatrix}$$

si dice MATRICE ASSOCIATA AD f.

La matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} \\ a_{1;2} & a_{2;2} & a_{2;3} \\ a_{1;3} & a_{2;3} & a_{3;3} \end{pmatrix}$$

si dice MATRICE DEI TERMINI DI SECONDO GRADO DI f.

Con un calcolo diretto, si vede facilmente che

$$f(x;y)=\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e che

$$a_{1;1}x^2+2a_{1;2}xy+a_{2;2}y^2+2a_{1;3}xz+2a_{2;3}yz+a_{3;3}z^2=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Il cambiamento di coordinate che vogliamo eseguire ha la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ rappresenta una traslazione.

La matrice $P = \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} & p_{1;3} \\ p_{1;2} & p_{2;2} & p_{2;3} \\ p_{1;3} & p_{2;3} & p_{3;3} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale che rappresenta una composizione di rotazioni rispetto agli assi coordinati.

Posto $Q = \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} & p_{1;3} & a \\ p_{1;2} & p_{2;2} & p_{2;3} & b \\ p_{1;3} & p_{2;3} & p_{3;3} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, risulta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} ({}^tQ).$$

Siano B' e A' la matrici della stessa equazione, trasformata con il cambiamento di coordinate. Allora, risulta nelle nuove coordinate

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} B' \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} ({}^tQ)\, BQ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi $B' = ({}^tQ)\, BQ$. Analogamente, si vede che $A' = P^{-1}AP = ({}^tP)\, AP$. Dunque, A e A' sono simili.

Poichè $\det(Q) = \det(P) = 1$, si ha $\det(B) = \det(B')$, e B e B' hanno lo stesso rango.

Data ora la quadrica di equazione

$$a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}xz + 2a_{2;3}yz + a_{3;3}z^2 + 2a_{1;4}x + 2a_{2;4}y + 2a_{3;4}z + a_{4;4} = 0,$$

il problema è trovare la matrice P che fa scomparire i termini in xy, xz e yz.

Poichè si ha $A' = P^{-1}AP$, è sufficiente che P diagonalizzi A. Essendo A una matrice reale simmetrica, esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = ({}^tP)\,AP$ sia una matrice diagonale e abbia sulla diagonale gli autovalori di A. Inoltre, P può essere scelta in modo tale che $\det(P) = 1$.

In conclusione, se si pone

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \\ \overline{Z} \end{pmatrix},$$

nel nuovo sistema di riferimento cartesiano scompaiono i termini in $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ e $\overline{YZ}$. A questo punto, effettuando una traslazione, si ottiene l'equazione canonica desiderata.

TEOREMA IMPORTANTE

Sia $f\,(x; y; z) = 0$ una quadrica. Allora esiste un sistema di coordinate in cui la quadrica ha equazione della forma

1. $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$, oppure
2. $\alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z$.

Nel primo caso, α, β e γ sono gli autovalori della matrice associata ai coefficienti di secondo grado, mentre δ è determinato dalla condizione $\alpha\beta\gamma\delta = -\det\,(A)$.

Nel secondo caso, α, β e 0 sono gli autovalori della matrice associata ai coefficienti di secondo grado, mentre $\alpha\beta\delta^2 = -\det(A)$.

Alla luce di questo teorema, si può perciò scrivere l'equazione caratteristica di una qualsiasi quadrica non degenere. Inoltre, è possibile identificare, in analogia a quanto fatto per le coniche, anche le quadriche conoscendo solo i segni degli autovalori di A e dei determinanti di A e di B, oltre al rango di B. Si ottiene la tabella presentata a parte.

TEOREMA

Sia

$$f(x;y) = a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}xz + 2a_{2;3}yz + a_{3;3}z^2 + 2a_{1;4}x + 2a_{2;4}y + 2a_{3;4}z + a_{4;4} = 0$$

una quadrica.

Se la quadrica ha un centro (cioè è un'ellissoide oppure un'iperboloide), allora le coordinate $(x;y;z)$ del centro sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{1;1}x + a_{1;2}y + a_{1;3}z + a_{1;4} = 0 \\ a_{2;1}x + a_{2;2}y + a_{2;3}z + a_{2;4} = 0 \\ a_{3;1}x + a_{3;2}y + a_{3;3}z + a_{3;4} = 0 \end{cases}.$$

Se la quadrica è un cono, la soluzione di questo sistema ne rappresenta il VERTICE.

TEOREMA

Sia

$$f(x;y) = a_{1;1}x^2 + 2a_{1;2}xy + a_{2;2}y^2 + 2a_{1;3}xz + 2a_{2;3}yz + a_{3;3}z^2 + 2a_{1;4}x + 2a_{2;4}y + 2a_{3;4}z + a_{4;4} = 0$$

una quadrica NON DEGENERE.

Allora, se

$$B = \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} \\ a_{1;2} & a_{2;2} & a_{2;3} \\ a_{1;3} & a_{2;3} & a_{3;3} \end{pmatrix}$$

e $P = (x_0;y_0;z_0)$ è un punto della quadrica, il piano tangente alla quadrica esiste, è unico e ha equazione

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

ESERCIZI

1) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$3x^2 + y^2 + 6z^2 + 4xz + 2\sqrt{5}x - 6y - 8\sqrt{5}z + 33 = 0.$$

2) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 10xz + 8y - 12 = 0.$$

3) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$4x^2 + y^2 + 5z^2 - 4xy - 20x - 10y + 25 = 0.$$

4) Riconoscere la seguente quadrica:

$$x^2 + 3z^2 + 2xz + yz - 2x - y - 6z + 3 = 0.$$

5) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$2y^2 - 2z^2 - 8y + 6z + 1 = 0.$$

6) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + 3x - 4z - 1 = 0.$$

7) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + y^2 + xy + 2x - y - 3 = 0.$$

8) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 4y = 0.$$

9) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4 = 0.$$

10) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y - 6z + 5 = 0.$$

11) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$3x^2 - z^2 - 4xy - 4x + 2z = 0.$$

12) Riconoscere e trovare l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$3yz - 4xz - 3y = 0.$$

13) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + z^2 - 6xz - 3x + z - 1 = 0.$$

14) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + 3x - 4z - 1 = 0.$$

15) Trovare il sistema di riferimento canonico e l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$x^2 + y^2 + xy + 2x - y - 3 = 0.$$

16) Riconoscere e trovare l'equazione canonica della seguente quadrica:

$$xy + xz + yz - 2x - 3y - z - 1 = 0.$$

17) Riconoscere la seguente quadrica:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 3 = 0.$$

Studiare la conica intersezione della quadrica con il piano $x = y$.

18) Fisso nello spazio tridimensionale un punto P e un piano π non contenente il punto. Studiare al variare del parametro $a \geq 0$ il luogo dei punti Q tali che il RAPPORTO tra la loro distanza da π, d, e la loro distanza da P valga costantemente a.

19) Fisso nello spazio tridimensionale una retta r e un piano π parallelo a r. Studiare al variare del parametro $a \geq 0$ il luogo dei punti Q tali che il RAPPORTO tra la loro distanza da π, d, e la loro distanza da P, d', valga costantemente a.

20) Scrivere l'equazione del piano tangente alla quadrica $2x^2-3xy+y^2-6xz+6=0$ nel punto $(1;-1;2)$.

21) Scrivere l'equazione del piano tangente alla quadrica $2x^2-4xy+y^2-3x+y-z=0$ nel punto $(0;0;0)$.

22) Studiare la conica $\begin{cases} x^2-2y^2-2xy-2z=0 \\ z=0 \end{cases}$.

23) Studiare la conica $\begin{cases} x^2+4xy+6y^2-xz+12=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$.

24) Dire che cosa rappresenta la quadrica $x^2+\lambda\left(y^2+z^2\right)+\mu=0$.

25) Studiare, al variare del parametro h la conica di equazione $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2-2y+1=0 \\ x+hy+z=0 \end{cases}$.

26) Classificare la seguente quadrica:

$$2x^2-4xy-y^2-4xz-2yz+2z^2+1=0.$$

27) Classificare la seguente quadrica:

$$2x^2+y^2-2xz-yz+z^2-4=0.$$

28) Classificare la seguente quadrica:

$$2x^2-y^2-4xz-2yz+z^2-1=0.$$

29) Al variare di $k\in\mathbb{R}$, classificare la seguente quadrica:

$$x^2+y^2+kz^2-2x=0.$$

30) Classificare la seguente quadrica:

$$5x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-4yz-1=0.$$

SOLUZIONI

1) La quadrica è un ellissoide; equazione canonica: $2X^2+Y^2+7Z^2=1$.
Sistema di riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{5}}X+\frac{1}{\sqrt{5}}Z-\sqrt{5} \\ y=Y+3 \\ z=-\frac{1}{\sqrt{5}}X+\frac{2}{\sqrt{5}}Z+\sqrt{5} \end{cases}$. Centro:$\left(-\sqrt{5};3;\sqrt{5}\right)$.
Piani di simmetria: $y-3=0$; $x+2z-\sqrt{5}=0$; $2x-z+2\sqrt{5}=0$.

2) La quadrica è un iperboloide a due falde. Equazione canonica: $X^2-\frac{Y^2}{2}-\frac{Z^2}{4}=1$. Sistema di riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Z \\ y=Y+1 \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Z \end{cases}$. Centro:$(0;1;0)$.
Piani di simmetria: $y-1=0$; $x+z=0$; $x-z=0$.

3) La quadrica è un paraboloide ellittico. Equazione canonica: $X^2 + Y^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}Z = 0$. Sistema di riferimento canonico: $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Z + \frac{8}{5} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Z + \frac{1}{5} \\ z = Y \end{cases}$.

Vertice: $\left(\frac{8}{5}; \frac{1}{5}; 0\right)$. Asse di simmetria: $\begin{cases} z = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$.

4) La quadrica è un cono. Vertice: $(0; 0; 1)$. L'intersezione con il piano $z = 0$ è la parabola $\begin{cases} z = 0 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$. L'intersezione con il piano $x = 0$ è la coppia di rette $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 0 \\ y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$.

5) La quadrica è un cilindro iperbolico parallelo al vettore $(1; 0; 0)$. Equazione canonica: $2Y^2 - 2Z^2 = \frac{5}{2}$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = X \\ y = Y + 2 \\ z = Z + \frac{3}{2} \end{cases}$.

6) La quadrica è un cilindro parabolico parallelo al vettore $(0; 1; 0)$. Equazione canonica: $X^2 = 4Z$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = X - \frac{3}{2} \\ y = Y \\ z = Z - \frac{5}{8} \end{cases}$.

7) La quadrica è un cilindro ellittico parallelo al vettore $(0; 0; 1)$. Equazione canonica: $X^2 + 3Y^2 = \frac{32}{3}$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{4}{3} \\ z = Z \end{cases}$.

8) La quadrica è un cilindro parabolico parallelo al vettore $(0; 0; 1)$. Equazione canonica: $\sqrt{2}Y^2 = -X$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{15}{8} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{3}{8} \\ z = Z \end{cases}$.

9) La quadrica è un ellissoide immaginario.

10) La quadrica è un ellissoide reale. Equazione canonica: $X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 = 4$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \\ z = Z + 1 \end{cases}$. Centro: $(2; -1; 1)$. Piani di simmetria: $x = 2$; $y = -1$; $z = 1$.

11) La quadrica è un iperboloide a una falda. Equazione canonica: $-X^2 + 4Y^2 - Z^2 = -1$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y' - 1 \\ z = Z + 1 \end{cases}$. Centro: $(0; -1; 1)$. Piani di simmetria: $z = 1$; $x + 2y + 2 = 0$; $2x - y - 1 = 0$.

12) La quadrica è un paraboloide iperbolico. Equazione canonica: $\frac{5}{2}X^2 - \frac{5}{2}Z^2 = \frac{6}{5}Y$.

13) La quadrica è un cilindro iperbolico parallelo al vettore $(0;1;0)$.
Equazione canonica: $-2X^2+4Z^2=\frac{5}{4}$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Z \\ y=Y \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Z-\frac{1}{2} \end{cases}$.

14) La quadrica è un cilindro parabolico parallelo al vettore $(0;1;0)$.
Equazione canonica: $X^2=4Z$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=X-\frac{3}{2} \\ y=Y \\ z=Z-\frac{13}{16} \end{cases}$.

15) La quadrica è un cilindro ellittico parallelo al vettore $(0;0;1)$. Equazione canonica: $\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{2}Y^2=\frac{16}{3}$. Riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y-\frac{5}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y+\frac{4}{3} \\ z=Z \end{cases}$.

16) La quadrica è un iperboloide a due falde. Equazione canonica: $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+Z^2=1$.

17) La quadrica è un ellissoide. L'intersezione con il piano $x=y$ è un'ellisse.

20) $5x+5y+6z-10=0$. 21) $-3x+y-z=0$.

22) La conica è unione di due rette. 23) La conica è un'ellisse.

25) La conica è sempre un'ellisse.

26) La quadrica è un'iperboloide a due falde. 27) La quadrica è un ellissoide. 28) La quadrica è un cilindro iperbolico.

29) Per $k<0$, la quadrica è un iperboloide ad una falda.

Per $k=0$, la quadrica è un cilindro parallelo all'asse z.

Per $k>0$, la quadrica è un ellissoide.

30) La quadrica è un ellissoide. Equazione canonica: $3X^2+3Y^2+9Z^2=1$; riferimento canonico: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{6}}{6}Y+\frac{\sqrt{3}}{3}Z \\ y=\frac{\sqrt{3}}{6}Y+\frac{\sqrt{3}}{3}Z \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{6}}{6}Y-\frac{\sqrt{3}}{3}Z \end{cases}$.