

# La parabola

Fisso nel piano  $\mathbb{R}^2$  un punto  $F$  ed una retta  $d$ , non passante per  $F$ . Si dice PARABOLA di FUOCO  $F$  e DIRETTRICE  $d$  l'insieme:

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P; F) = dist(P; d)\},$$

cioè l'insieme dei punti equidistanti dal punto  $F$  e dalla retta  $d$ .

Se  $p$  è la distanza di  $F$  dalla retta  $d$ , si fissa il riferimento cartesiano in modo tale che  $F = (\frac{p}{2}; 0)$  e  $d$  sia la retta di equazione  $x = -\frac{p}{2}$ . Allora, la condizione di equidistanza dal punto  $F$  e dalla retta  $d$  si scrive come:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} &= \left|x + \frac{p}{2}\right|, \\ \text{Elevando al quadrato,} \\ x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 &= x^2 + \frac{p^2}{4} + px; \\ \text{Infine, semplificando,} \\ y^2 &= 2px. \end{aligned}$$

Si osserva subito che la parabola è una conica, ha un asse di simmetria (l'asse orizzontale delle  $x$ ), detto ASSE della parabola, e il punto di intersezione dell'asse di simmetria con la parabola stessa è detto VERTICE DELLA PARABOLA.

## ESERCIZI.

- 1) Scrivere l'equazione della parabola di fuoco  $F = (1; 2)$  e di vertice  $V = (0; 2)$ .
- 2) Scrivere l'equazione della parabola avente vertice  $V = (1; 1)$  e direttrice  $d : x - y + 2 = 0$ . Trovare riferimento ed equazione canonica.
- 3) Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco  $F = (0; 2)$  e direttrice  $d : x - 2y = 0$ . Trovare riferimento ed equazione canonici.
- 4) Scrivere l'equazione della parabola di  $V = (-\frac{9}{100}; \frac{1}{100})$  e tale che la distanza del fuoco dalla direttrice sia  $\frac{\sqrt{5}}{25}$ .

## SOLUZIONI.

1)  $y^2 - 4x - 4y + 4$ .

2)  $x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 4y + 4 = 0$ . Riferimento canonico: 
$$\begin{cases} Y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2} \\ X = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

Equazione canonica:  $Y^2 = 4\sqrt{2}X$ . Fuoco:  $F = (2; 0)$ .

3)  $4x^2 + y^2 + 4xy - 20y + 20 = 0$ . Equazione canonica:  $Y^2 = \frac{8}{\sqrt{5}}X$ .

Riferimento canonico: 
$$\begin{cases} X = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ Y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} .$$

4)  $4x^2 + y^2 - 4xy - y = 0$ . Equazione canonica:  $Y^2 = \frac{2\sqrt{5}}{25}X$ . Riferimento

canonico: 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y - \frac{9}{100} \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y + \frac{1}{100} \end{cases} .$$

