Esercizi laboratorio di Geometria 1A

1) Trovare $2A + 3B - C$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Dimostrare la seguente proprietà:
Se A e B sono due matrici $m \times n$ e se k è uno scalare, allora $k(A + B) = kA + kB$.

3) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, se esistono, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

4) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, se esistono, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

5) Trovare $A \cdot B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esiste anche $B \cdot A$?

6) Trovare la matrice trasposta A^T se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

7) Calcolare $A \cdot A^T$ e $A^T \cdot A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

8) Calcolare $A \cdot A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quanto vale $A \cdot A^T$?

9) Considero le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $(AB)\,C$ e $A\,(BC)$ e verificare che le due matrici coincidono.
b) Calcolare $(AB)^T$ e $B^T \cdot A^T$ e verificare che le due matrici coincidono.

10) Calcolare $A \cdot B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

11) Calcolare $A \cdot B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

12) Sia A una qualsiasi matrice 3×3, e sia D una matrice

$$D = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix},\ \eta \in \mathbb{R}.$$

Far vedere che $A \cdot D = D \cdot A$.
13) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & a_{1;4} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & a_{2;4} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} \\ a_{4;1} & a_{4;2} & a_{4;3} & a_{4;4} \end{pmatrix}$$

una matrice 4×4. Sia poi D una matrice DIAGONALE della forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Provare che, se $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4$ sono tutti diversi tra di loro, allora $A \cdot D = D \cdot A$ se e solo se $A = A^T$.

Soluzioni

1) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 13 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 12 & 27 \end{pmatrix}$.

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & -18 & 0 \\ -8 & 12 & -6 \\ -35 & 36 & 15 \end{pmatrix}$.

4) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 16 \\ 11 & 1 & 12 \\ 17 & 3 & 20 \end{pmatrix}$.

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 18 & -14 & 30 \\ 2 & 19 & -17 & 33 \\ 0 & 20 & -20 & 36 \end{pmatrix}$.

5) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -13 & 13 \\ 26 & -5 & 0 & 32 \end{pmatrix}$.

$B \cdot A$ non esiste.

6) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7) Calcolare $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$, dove

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

10) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -15 \\ -12 & 0 & 20 \\ 17 & 7 & -35 \end{pmatrix}$.

11) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -9 \\ -17 \\ 27 \\ -5 \end{pmatrix}$.