Esercizi laboratorio di Geometria 1A

1) E' data l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definita da

$$A(x; y) = (2y; 3x - y).$$

Trovare la matrice associata a tale applicazione rispetto alle basi seguenti:
a)$\{(1; 0); (0; 1)\}$;
b)$\{(1; 3); (2; 5)\}$.

2) E' data l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definita da

$$A(x; y; z) = (2y + z; x - 4y; 3x).$$

Trovare la matrice associata a tale applicazione rispetto alla base seguente:
$\{(1; 1; 1); (1; 1; 0); (1; 0; 0)\}$.

3) $\{1; t; e^t; te^t; e^{3t}\}$ è base di uno spazio vettoriale di funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, V.
Sia D l'applicazione lineare su V definita da $D(f) = \frac{df}{dx}$.
Trovare la matrice associata a tale applicazione rispetto alla base assegnata.

4) E' data l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, definita da

$$A(X) = MX, \text{ dove } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice associata a tale applicazione rispetto alla base seguente:
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5) Considero lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$ e considero su di esso la base $\{(1; 0) ; (1; 1)\}$. Considero l'applicazione lineare $L : V \longrightarrow V$ tale che:

- $L(1; 0) = (6; 4)$;
- $L(1; 1) = (1; 5)$.

Scrivere la matrice associata ad L rispetto alla base precedente.

6) Scrivere, rispetto alla base usuale di $\mathbb{R}^2$, la matrice associata all'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che:

- $L(1; 0) = (2; 4)$;

- $L(0;1) = (5;8)$.

7) Scrivere, rispetto alla base usuale di $\mathbb{R}^2$, la matrice associata all'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che rappresenta la rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{R}^2$.

8) Scrivere, rispetto alla base usuale di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata all'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che rappresenta la simmetria rispetto al piano $y = -x$ di $\mathbb{R}^3$.

9) Scrivere, rispetto alle basi usuali di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, la matrice associata alla seguente applicazione lineare:

$$G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2;$$
$$G(x;y;z) = (2x - 4y + 9z; 5x + 3y - 2z).$$

10) Scrivere la matrice associata alla seguente applicazione lineare:

$$G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2;$$
$$G(x;y;z) = (2x + y - z; 3x - 2y + 4z),$$

rispetto alle basi $\{(1;1;1);(1;1;0);(1;0;0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\{(1;3);(1;4)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Soluzioni

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & 2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. 7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 9) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. 10) $\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.