Abstract

Il polinomio minimo, così come il polinomio caratterisico, è un importante invariante per le matrici quadrate.

La forma canonica di Jordan è un'"approssimazione" della diagonalizzazione, e viene adoperata per matrici non diagonalizzabili. In questo capitolo, ci occuperemo solamente di matrici **complesse**, in modo tale da evitare casi di matrici reali i cui autovalori non siano essi stessi reali (ovvero abbiano parte immaginaria non nulla). In questo contesto, le uniche matrici non diagonalizzabili sono quelle per cui ci sia qualche autovalore con molteplicit geometrica diversa da quella algebrica.

1 Il polinomio minimo.

Sia A una matrice complessa $n \times n$, e sia $p(t) = a_1 t^k + a_2 t^{k-1} + ... + a_{k-1} t + a_k$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$. Ricordo che scrivere $p(A)$ equivale all'espressione matriciale

$$p(A) = a_1 \cdot A^k + a_2 \cdot A^{k-1} + ... + a_{k-1} \cdot A + a_k \cdot I.$$

p si dice **polinomio annullatore** per A se $p(A) = 0$. Un esempio di polinomio annullatore per una matrice A è il polinomio caratteristico (Teorema di Cayley-Hamilton).

DEFINIZIONE

m si dice **polinomio minimo** per A se:

- ♣ $m(A) = 0$;
- ♣ Se p è un polinomio non nullo tale che $p(A) = 0$, allora il grado di m non può superare quello di p: $deg(m) \leq deg(p)$;
- ♣ Il coefficiente del termine di grado massimo di m è 1. ■

L'ultima condizione è una convenzione molto utile: altrimenti, il polinomio minimo di ogni matrice sarebbe quello identicamente nullo!

TEOREMA 1

Il polinomio minimo di una matrice ESISTE SEMPRE ed è UNICO. ■

Il teorema precedente ci permette in paricolare di parlare "del" polinomio minimo, invece che di "un generico polinomio minimo". Indicheremo con m_A il polinomio minimo di A.

I due seguenti risultati, invece, ci permettono di calcolare esplicitamente il polinomio minimo.

La dimostrazione non è difficile, quindi la riporto di seguito (pure se non è necessaria per proseguire la lettura di questi appunti).

TEOREMA 2

p è un polinomio annullatore per la matrice A se e solo se m_A **divide** p.

Dim. E' evidente che se m_A divide il polinomio p, allora anche $p(A) = 0$ (essendo $m_A(A) = 0$).

Viceversa, se $p(A) = 0$, dividiamo $p(t)$ per $m_A(t)$: abbiamo

$$p = m_A \cdot q + r,$$

dove r ha grado strettamente minore di m_A. (Questo è l'algoritmo di divisione di Euclide). Allora,

$$r(A) = p(A) - m_A(A) \cdot q(A) = 0 - q(A) \cdot 0 = 0,$$

Poichè m_A è il polinomio minimo, e r ha grado strettamente minore di m_A, deve essere $r = 0$, ovvero m_A **divide** p. ■

In particolare, il polinomio minimo di una matrice A, m_A, divide il polinomio caratteristico χ_A.

TEOREMA 3

Supponiamo che $\chi_A(t) = (-1)^n(t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2}...(t - \lambda_h)^{r_h}$, dove $\{\lambda_i\}$ sono gli autovalori di A, con corrispondenti molteplicità algebriche r_i.

Allora, il polinomio minimo ha la forma:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2}...(t - \lambda_h)^{r_h},$$

dove $1 \leq s_i \leq r_i$.

Sappiamo già che m_A divide il polinomio caratteristico χ_A. Pertanto,

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2}...(t - \lambda_h)^{r_h},$$

dove $s_i \leq r_i$. Resta solo da verificare che nessuno degli s_i vale 0, cioè che ogni autovalore è radice del suo polinomio minimo.

Sia dunque $\overrightarrow{v}$ un autovettore associato all'autovalore λ_i. Abbiamo $m_A(A)\overrightarrow{v} = m_A(\lambda_i)\overrightarrow{v} = 0$. Ma $\overrightarrow{v}$ è non nullo, dunque $m_A(\lambda_i) = 0$. ■

ESEMPIO

Consideriamo la matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unico autovalore di I è $\lambda = 1$, e il polinomio minimo è $m_I(t) = t - 1$. ■

ESEMPIO

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unico autovalore di I è $\lambda = 1$. Tuttavia, $p(t) = t - 1$ non si annulla se applicato alla matrice A: $A - I$ non è la matrice nulla. Allora, proviamo $p'(t) = (t-1)^2$. $p'(A) = (A - I)^2 = 0$, quindi $m_A(t) = (t-1)^2$. ■

ESEMPIO

Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unico autovalore di I è $\lambda = 1$. Tuttavia, $p(t) = t - 1$ non si annulla se applicato alla matrice B: $B - I$ non è la matrice nulla. Allora, proviamo $p'(t) = (t-1)^2$. Tuttavia, anche $p'(B)$ non si annulla: proviamo dunque $p''(t) = (t-1)^3$. $p''(B) = 0$, dunque $m_B(t) = (t-1)^3$. ■

OSSERVAZIONE

Si può dimostrare che il polinomio minimo di una matrice ha tutti i coefficienti $s_i = 1$ se e solo se la matrice è diagonalizzabile.

ESEMPIO

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $\chi_A(t) = -(t-2)^3(t-7)^2$. Per il TEOREMA 3, i candidati ad essere il polinomio minimo di A sono 6 (ordinati da quello di grado inferiore a quello di grado superiore):

- ♢ $p_1(t) = (t-2)(t-7)$ (di grado 2);
- ♢ $p_2(t) = (t-2)(t-7)^2$ (di grado 3);
- ♢ $p_3(t) = (t-2)^2(t-7)$ (di grado 3);
- ♢ $p_4(t) = (t-2)^2(t-7)^2$ (di grado 4);
- ♢ $p_5(t) = (t-2)^3(t-7)$ (di grado 4);
- ♢ $p_6(t) = (t-2)^3(t-7)^2$ (di grado 5).

Infatti, essi sono gli unici polinomi con coefficiente di grado massimo pari ad 1 che dividono il polinomio caratteristico e che si annullano su ciascuno degli autovalori di A.

Ora applichiamo a ciascuno di essi A, finchè non si trova il polinomio minimo.

$p_1(A) \neq 0$ e $p_2(A) \neq 0$. Invece, $p_3(A) = 0$. Dunque, p_3 è il polinomio minimo di A: $m_A(t) = (t-2)^2(t-7)$.

ESERCIZI

1.) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolarne il polinomio minimo.

2.) Trovare il polinomio minimo della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.) Dire perch` una matrice è non singolare se e solo se il suo polinomio minimo ha termine noto diverso da 0.

4.) Studiare, al variare dei parametri a e b, il polinomio minimo della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

5.) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che A e B hanno due polinomi caratteristici diversi (e quindi non sono simili) ma hanno lo stesso polinomio minimo.

6.) Dimostrare che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso polinomio minimo.

7.) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolarne il polinomio minimo.

8.) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolarne il polinomio minimo.

9.) Sia E una matrice $n \times n$ per cui $E^2 = E$. Scrivere il polinomio minimo di E.

SOLUZIONI.

1.) $m_A(t) = (t-4)^2$.

2.) $m_A(t) = (t-2)(t-1)$.

3.) La matrice è singolare se e solo se 0 è un suo autovalore. Quest'ultima cosa accade se e solo se il polinomio minimo ha t (elevato, eventualmente, a qualche potenza positiva), ovvero ha termine noto nullo.

4.) Se $b = 0$, $m_A(t) = (t-a)$. Se $b \neq 0$, $m_A(t) = (t-a)^3$.

6.) Sia $p(t)$ un generico polinomio. Allora, $p({}^tA) = {}^tp(A)$, perchè occorre trasporre ciascun addendo, e considerare che ${}^t(A \cdot A \cdot ... \cdot A) = {}^tA \cdot {}^tA \cdot ... \cdot {}^tA$. Poichè (ovviamente) ${}^t0 = 0$ (dove 0 è la matrice nulla), si ha $p(A) = 0$ se e solo se $p({}^tA) = 0$. Dunque, A e ${}^tA$ hanno lo stesso insieme di polinomi annullatori, e, in particolare, lo stesso polinomio minimo.

7.) $m_A(t) = (t-2)^2(t-7)$.

8.) $m_A(t) = (t-3)^3$.

9.) Ci sono 3 possibilità:

- ♡ Se E è non-singolare, allora da $E^2 = E$ si ricava, moltiplicando per E^{-1}, $E = I$. Quindi, $m_E(t) = t - 1$.

- ♡ Se $E = 0$, allora $m_E(t) = t - 1$.

- ♡ In tutti gli altri casi, essendo $p(t) = t^2 - t$ un polinomio annullatore per E, e non essendo possibile trovare polinomi annullatori di grado 1 (altrimenti la matrice sarebbe o 0 o I), deve essere $m_E(t) = t^2 - t$.

2 Invarianti.

Quando due matrici quadrate sono simili, esse sono, essenzialmente, la stessa cosa. Si tratta solo di un cambiamento di base: se $B = P^{-1}AP$, allora A e B sono "la stessa cosa", vista da un differente punto di vista. Ecco un breve elenco dei principali invarianti delle matrici quadrate, che si mantengono inalterati per similitudine (ovvero rispetto ad un cambiamento di base).

- ♠ Gli autovalori.
- ♠ Le molteplicità algebriche di ciascun autovalore.
- ♠ Le molteplicità geometriche di ciascun autovalore (ovvero le dimensioni degli autospazi).
- ♠ Il polinomio caratteristico.
- ♠ Il polinomio minimo.
- ♠ La traccia.
- ♠ Il determinante.
- ♠ Il rango.

3 Forma canonica di Jordan.

Sia $J_\lambda^{(d)}$ la seguente matrice $\mathbf{d} \times \mathbf{d}$.

$$J_\lambda^{(d)} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & \\ & & \lambda & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \lambda & 1 & \\ & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

dove tutti gli elementi non nulli valgono 0. In particolare, se $\mathbf{d} = \mathbf{1}$, $J_\lambda^{(1)}$ è una matrice 1×1: (λ). $J_\lambda^{(d)}$ si dice **blocco di Jordan**.

Il principale teorema è:

TEOREMA

Sia A una matrice quadrata complessa. Allora A è simile ad una matrice diagonale costituita da blocchi di Jordan:

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

dove $A_1; A_2; ...; A_m$ sono blocchi di Jordan.
A' è dunque simile ad A e ha la forma:

$$\begin{pmatrix}
\begin{array}{cccc|}
\mu_1 & 1 & & \\
& \mu_1 & \ddots & \\
& & \ddots & 1 \\
& & & \mu_1 \\ \hline
\end{array} & & & \\
& \begin{array}{|cccc|}
\hline
\mu_2 & 1 & & \\
& \mu_2 & \ddots & \\
& & \ddots & 1 \\
& & & \mu_2 \\ \hline
\end{array} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \begin{array}{|cccc}
\hline
\mu_m & 1 & & \\
& \mu_m & \ddots & \\
& & \ddots & 1 \\
& & & \mu_m
\end{array}
\end{pmatrix}$$

ATTENZIONE! I numeri $\{\mu_1; \mu_2; ...; \mu_m\}$, possono essere non tutti distinti. Infatti, ad ogni autovalore possono essere associati più di un blocco di Jordan, e il numero di blocchi corrispondenti ad un singolo autovalore è la molteplicità geometrica dello stesso.

ESEMPIO

Una matrice complessa A ha autovalori 3 (con molteplicità algebrica 4) e i (con molteplicità algebrica 2). Se 3 ha molteplicità geometrica 3 e i ha molteplicità geometrica 1, la sua forma canonica di Jordan sarà:

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i
\end{pmatrix}.$$

Si notino i 4 blocchi di Jordan $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; (3); (3) e $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. I primi tre di essi sono relativi all'autovalore 3, l'ultimo è relativo all'autovalore i.

Se, invece, 3 avesse molteplicità geometrica 2, le possibili forme canoniche di Jordan sarebbero:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

La differenza tra queste due matrici è il polinomio minimo: la prima ha polinomio minimo $(t-3)^2(t-i)^2$, mentre la seconda ha polinomio minimo $(t-3)^3(t-i)^2$. Dato che il polinomio minimo è un invariante per cambiamento di base, ricaviamo che:

- Se A ha polinomio minimo $(t-3)^2(t-i)^2$, allora la forma canonica di Jordan sarebbe
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix};$$
- Se A ha polinomio minimo $(t-3)^3(t-i)^2$, allora la forma canonica di Jordan sarebbe
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

4 A cosa serve la forma canonica di Jordan.

4.1 Approssimazione della diagonalizzazione.

Non tutte le matrici complesse sono diagonalizzabili. Tuttavia, tutte possono essere portate in forma canonica di Jordan. La forma canonica di Jordan è la "seconda migliore possibilità", dopo la diagonalizzazione, per studiare una matrice. Infatti, i numeri al di sopra della diagonale (che, convenzionalmente, sono tutti 1) potrebbero essere scelti come $0,1$; $0,00001$ o, in generale, un qualsiasi $\varepsilon \neq 0$ piccolo a piacere.

4.2 Un modo pratico di calcolare gli invarianti.

Se una matrice viene posta in forma canonica di Jordan, tutti i principali invarianti possono essere calcolati facilmente: polinomio minimo, polinomio caratteristico, molteplicità geometriche e algebriche degli autovalori possono essere determinati con il minimo sforzo.

4.3 Fattori primi.

Ogni numero naturale può essere fattorizzato in un prodotto di numeri primi; corrispondentemente, ogni matrice complessa è costruita (a meno di similitudine) tramite blocchi di Jordan.

5 Alcuni risultati notevoli.

In questa sezione, descriverò alcune proprietà notevoli della forma canonica di Jordan. Consideriamo la matrice $J_\lambda^{(d)}$ definita precedentemente. Allora:

1. λ è il suo unico autovalore;
2. Il polinomio minimo è $(t-\lambda)^d$;
3. Il polinomio caratteristico è: $(-1)^d\,(t-\lambda)^d$;
4. La molteplicità geometrica dell'autovalore λ è 1.

Sia ora A una matrice in forma canonica di Jordan. Allora, gli autovalori sono gli elementi che stanno sulla diagonale. Si dimostra facilmente che:

- $m_A(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}(t-\lambda_2)^{s_2}\dots(t-\lambda_k)^{s_k}$, dove $s_i \times s_i$ è la dimensione del più grande dei blocchi di Jordan associati all'autovalore λ_i.
- La molteplicità geometrica dell'autovalore λ_i è pari al numero di blocchi di Jordan associati all'autovalore λ_i.

ESEMPIO

Se

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

il polinomio minimo è $m_S(t) = (t-2)^2(t-3)$. L'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 2; l'autovalore 3 ha molteplicità geometrica 2.

ESEMPIO

Se

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

il polinomio minimo è $m_T(t) = (t-2)^4(t-3)$. L'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 1; l'autovalore 3 ha molteplicità geometrica 2.

OSSERVAZIONE.

Il calcolo della matrice di cambiamento di base che permette il passaggio alla forma canonica di Jordan è spesso complicato, specialmente se si lavora con matrici di grosse dimensioni. La risoluzione di tale problema può essere comunque ottenuta risolvendo dei sistemi lineari.

Consideriamo, ad esempio, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $\chi_B(t) = (-1)^3(t+2)^2(t-4)$. All'autovalore $\lambda_1 = 4$ corrisponde l'autospazio $span\{(0;1;1)\}$, di dimensione 1. All'autovalore $\lambda_2 = -2$ corrisponde l'autospazio $span\{(1;1;0)\}$, di dimensione 1. Dunque, $\lambda_2 = -2$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Di conseguenza, c'è un unico blocco canonico di Jordan corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = -2$, e questo blocco avrà dimensione 2×2 (dato che il polinomio caratteristico resta invariato per similitudine, l'autovalore -2 deve comparire due volte sulla diagonale della forma canonica di Jordan di B). La forma canonica di Jordan di B deve essere cioè:

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sia $\{\overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\}$ la base che realizza rispetto a cui l'applicazione lineare rappresentata da B si scrive nella forma B'. Allora, dovrebbe essere:

- $B\overrightarrow{v}_1 = -2\overrightarrow{v_1}$;
- $B\overrightarrow{v_2} = -2\overrightarrow{v_2} + 1 \cdot \overrightarrow{v_1}$;
- $B\overrightarrow{v}_3 = 4\overrightarrow{v_3}$.

Per quanto scritto sopra, possiamo scegliere $\overrightarrow{v_1} = (1; 1; 0)$ e $\overrightarrow{v_3} = (0; 1; 1)$. Cerchiamo ora, per completare la base, il vettore $\overrightarrow{v_2} = (x; y; z)$. Si ha:
$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Il sistema lineare da risolvere è:
$\begin{cases} -3x + y - z = -2x + 1 \\ -7x + 5y - z = -2y + 1 \\ -6x + 6y - 2z = -2z \end{cases}$, da cui si ricava, partendo dall'ultima equazione:
$\begin{cases} z = -1 \\ z = -1 \\ x = y \end{cases}$. Prendendo, per esempio, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si completa la base richiesta.

Mettendo in colonna i vettori trovati, si ottiene la matrice del cambiamento di coordinate:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti,
$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.