L'iperbole

Fisso nel piano due punti distinti, F ed F'. Si dice IPERBOLE di FUOCHI F ed F' l'insieme:

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P; F) - dist(P; F') = 2a\}.$$

Se $dist(F; F') = 2c$, fisso un sistema di assi cartesiano tale che l'asse x sia la retta passante per F ed F', orientata nella direzione da F' a F, e l'asse y sia l'asse di simmetria del segmento $\overline{FF'}$. In tal modo, abbiamo $F = (c; 0)$ e $F' = (-c; 0)$. Rispetto a tale riferimento, l'ellisse diventa l'insieme dei punti $P = (x; y)$ tali che

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a; \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
4cx + 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
cx + a^2 = -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx = a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2cx + a^2c^2; \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).
\end{gathered}$$

Deve essere $c > a$, e quindi si pone: $b^2 = c^2 - a^2 > 0$. Si ottiene così l'EQUAZIONE CANONICA DELL'IPERBOLE:

$$\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si noti che tale equazione è stata ottenuta rispetto ad un riferimento privilegiato, detto RIFERIMENTO CANONICO.

OSSERVAZIONE

Se $P = (x; y)$ sta sull'iperbole, anche i punti di coordinate $(x; -y)$; $(-x; y)$ e $(-x; -y)$ soddisfano la stessa equazione, e pertanto stanno sulla curva. Dunque, gli assi x e y sono gli assi di simmetria della conica. L'asse che contiene i fuochi si dice ASSE FOCALE o ASSE TRASVERSO.

L'iperbole interseca l'asse x in due punti:

$$A' = (-a; 0);\ A = (a; 0).$$

Essi sono detti VERTICI dell'iperbole.

Invece, l'asse y non interseca l'iperbole in nessun punto del piano reale.

L'origine O è detta CENTRO dell'iperbole. Essa è l'intersezione dei due assi di simmetria.

Si verifica inoltre che l'iperbole ha due rami: quello di sinistra è contenuto nella regione a sinistra della retta $x = -a$, quello di destra è contenuto nella regine a destra della retta $x = a$.

Asintoti dell'iperbole

Studio ora le intersezioni dell'iperbole con le rette passanti per l'origine della forma $y = mx$.

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$. Sostituendo $y = mx$ nella prima equazione, troviamo

$$\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{m^2x^2}{b^2} = 1,$$

che, dopo opportuni calcoli, si trasforma in

$$\left(b^2 - a^2m^2\right)x^2 = a^2b^2.$$

L'equazione ammette soluzioni se e solo se $b^2 - a^2m^2 > 0$, cioè $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$, da cui

$$-\tfrac{b}{a} < m < \tfrac{b}{a}.$$

In particolare, le rette di equazioni $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ sono dette ASINTOTI dell'iperbole, perchè non intersecano mai la curva, ma ne approssimano sempre meglio il comportamento quando x tende all'infinito.

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo un punto $(x_0; y_0)$ che sta sull'iperbole, dove possiamo supporre che $x_0 > 0$. Sia $(x_0; y_1)$ il punto che si trova sull'asintito che ha la stessa ascissa. Si ha $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}$ e $y_1 = \frac{b}{a}x_0$. Valutiamo la differenza $y_1 - y_0$.

$$y_1 - y_0 = \tfrac{b}{a}x_0 - \tfrac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2} = \tfrac{b}{a}\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - a^2}\right).$$

Moltiplico e divido per $x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}$.

$$y_1 - y_0 = \tfrac{b}{a}\tfrac{x_0^2 - x_0^2 + a^2}{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}} = \tfrac{ba}{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}.$$

Si verifica che, quando $x_0 \longmapsto +\infty$, la quantità $y_1 - y_0$ tende a zero.

L'iperbole equilatera

Un caso molto particolare si ha quando i due asintoti di una iperbole risultano essere tra loro ortogonali; in tal caso è possibile cambiare sistema di riferimento ed utilizzare come nuovo sistema di assi cartesiani ortonormali quello definito dai due asintoti.

Osserviamo innanzitutto che la condizione di ortogonalità tra i due asintoti si traduce nella condizione:

$$-\frac{b}{a}\frac{b}{a} = -1, \text{ cioè } b = a.$$

Dunque, rispetto ad un sistema di riferimento canonico, l'equazione di un'iperbole equilatera è del tipo:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Il novo sistema cartesiano costituito dagli asintoti risulta essere ruotato rispetto a quello di partenza di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, e dunque la sostituzione lineare omogenea risulta essere:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}.$$

L'equazione dell'iperbole nel vecchio riferimento

$$x^2 - y^2 = a^2$$

si trasforma dunque in:

$$XY = \frac{a^2}{2}.$$

Essa si dice EQUAZIONE DELL'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASINTOTI.

Riepilogo sull'iperbole

$\mathcal{CASO\ A}$

Data l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- Il Centro è $C = O = (0; 0)$.
- I Vertici sono $A' = (-a; 0)$; $A = (a; 0)$.
- L'asse Trasverso è l'asse x; l'asse y non interseca l'iperbole in nessun punto.
- I fuochi si trovano sull'asse x (l'asse orizzontale) e hanno coordinate $F' = (-c; 0)$ e $F = (c; 0)$, dove
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
- Gli asintoti dell'iperbole sono le rette di equazioni $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$.

$\mathcal{CASO\ B}$

Data l'iperbole di equazione

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- Il Centro è $C = O = (0; 0)$.
- I Vertici sono $B' = (0; -b)$; $B = (0; b)$.
- L'asse Trasverso è l'asse y; l'asse x non interseca l'iperbole in nessun punto.
- I fuochi si trovano sull'asse y (l'asse verticale) e hanno coordinate $F' = (0; -c)$ e $F = (0; c)$, dove
$$c = \sqrt{b^2 + a^2}.$$
- Gli asintoti dell'iperbole sono le rette di equazioni $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$.

OSSERVAZIONE (EQUAZIONE PARAMETRICA).

I punti dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sono tutti e soli i punti della forma $P = (x; y)$, con

$$\begin{cases} x = a \cdot cosh(t) \\ y = b \cdot sinh(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Le funzioni COSENO IPERBOLICO e SENO IPERBOLICO sono definite da:

- $cosh(x) = \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)}{2}$.
- $sinh(x) = \frac{\left(e^x-e^{-x}\right)}{2}$.

ESERCIZI

1) Determinare centro, assi e asintoti dell'iperbole $(x-8)\,y = 21$.
2) Determinare il parametro k in modo che l'iperbole $3x^2 - ky^2 = 1$ sia equilatera.
3) Trovare l'iperbole avente per asintoti le rette $y = -6x$; $y = 6x$, e distanza tra i fuochi uguale a 4.
4) Determinare l'equazione dell'iperbole di asintoti $2x-y = 0$ e $x+2y = 0$, e passante per il punto $P = (1;0)$.

5) Scrivere l'equazione dell'iperbole di fuochi $F' = (1;2)$ e $F = (1;-1)$ e passante per il punto $A = (1;0)$. Determinare inoltre riferimento ed equazione canonici.
6) Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera di asintoti $x+3y-1 = 0$ e $3x-y-1 = 0$, passante per il punto $O = (0;0)$. Determinare inoltre riferimento ed equazione canonici.

SOLUZIONI

1) $C = (8;0)$. Asintoti: $x = 8$ e $y = 0$. Assi: $y = x-8$ e $y = 8-x$.
2) $k = 3$.
3) $\frac{x^2}{\frac{4}{37}} - \frac{y^2}{\frac{144}{37}} = 1$.
4) $2x^2-2y^2+3xy-2 = 0$. Riferimento canonico: $\begin{cases} X = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases}$.
5) $x^2-8y^2-2x+8y+1 = 0$. Riferimento canonico: $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$.
Equazione canonica: $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.
6) $3x^2-3y^2+8xy-4x-2y = 0$. Riferimento canonico: $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ Y = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$.
Equazione canonica: $-\frac{X^2}{\frac{1}{5}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{5}} = 1$