1 Curve.

1.1 Problema 1.

a) Data la curva in $\mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (at - t^3; 3t^2; 3t + t^3),$$

con $t \in [-100; 100]$, determinare il valore del parametro a per cui la curva è piana.

Sol.)

$$\begin{gathered}\gamma'(t) = (a - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2);\\ \gamma''(t) = (-6t; 6; 6t);\\ \gamma'''(t) = (-6; 0; 6).\end{gathered}$$

La curva è piana se e solo se la sua torsione è nulla.

$$\tau(t) = \frac{(\gamma' \wedge \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}.$$

Affinchè la torsione sia nulla, è sufficiente che si annulli il numeratore, ovvero

$$(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t).$$

Ma,

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) =$$

$$= det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{pmatrix} =$$

$$(18t^2 - 18)\overrightarrow{e_1} + (-6at - 18t)\overrightarrow{e_2} + (6a + 18t^2)\overrightarrow{e_3} =$$

$$(18t^2 - 18; -6at - 18t; 6a + 18t^2).$$

Da qui,

$$\begin{gathered}(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) =\\ = -6(18t^2 - 18) + 6(6a + 18t^2) =\\ = 36(-3t^2 + 3 + a + 3t^2) = 36(3 + a).\end{gathered}$$

Alla fine, deve essere

$$a = -3.$$

b) Verificare che, per tale valore del parametro, la curva è regolare e scrivere l'equazione del piano su cui essa giace.

Sol.) Per $a = 3$, $\gamma'(t) = (-3 - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2)$;

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-3-3t^2)^2 + 36t^2 + (3+3t^2)^2} \geq 3\sqrt{2} > 0.$$

Dunque, la curva è regolare.

Calcoliamo il piano su cui la curva giace. Ci sono due modi: il primo è quello di calcolare il vettore binormale e poi scrivere l'equazione del piano sapendo che esso è perpendicolare al vettore normale. Il secondo, in questo caso pi immediato e veloce, è il seguente: imponiamo che

$$\begin{gathered} b\gamma_1(t) + c\gamma_2(t) + d\gamma_3(t) + f = 0; \\ b(-3t - t^3) + c(3t^2) + d(3t + t^3) + f = 0; \\ (-b + d)t^3 + (3c)t^2 + (-3b + 3d)t + f = 0. \end{gathered}$$

L'uguaglianza sopra scritta deve essere vera per ogni t, quindi i coefficienti devono essere tutti nulli (l'espressione è nulla se e solo se tutti i coefficienti sono nulli). Se il piano è $bx + cy + dz + f = 0$, deve essere $c = 0$ e $b = d$. Il piano è

$$x + z = 0.$$

1.2 Problema 2.

Sia $\gamma(t)$, $t \in [a; b]$, una curva regolare di $\mathbb{R}^3$, e sia $\delta(t) = r \cdot \gamma(t)$, con $r > 0$. Questo significa che, se

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t)),$$

allora

$$\delta(t) = (r \cdot \gamma_1(t); r \cdot \gamma_2(t); r \cdot \gamma_3(t))$$

Sol.) Si ha:

$$\overrightarrow{\delta'(t)} = r \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)};$$

$$\overrightarrow{\delta''(t)} = r \cdot \overrightarrow{\gamma''(t)}.$$

Applichiamo la formula:

$$\kappa_\delta(t) = \frac{\left\| \left(r \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} \right) \wedge \left(r \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} \right) \right\|}{\left\| r \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} \right\|^3} =$$
$$= \frac{r^2 \left\| \left(\overrightarrow{\gamma'(t)} \right) \wedge \left(\overrightarrow{\gamma'(t)} \right) \right\|}{r^3 \left\| \overrightarrow{\gamma'(t)} \right\|^3} = \frac{1}{r} \frac{\left\| \left(\overrightarrow{\gamma'(t)} \right) \wedge \left(\overrightarrow{\gamma'(t)} \right) \right\|}{\left\| \overrightarrow{\gamma'(t)} \right\|^3}.$$

Pertanto,

$$\kappa_\delta(t) = \frac{1}{r} \kappa_\gamma(t).$$

2 Distanze.

a) Definiamo l'**arrotondamento per eccesso** $[x]$ di un numero reale x come il più piccolo numero intero z tale che $z > x$. Ad esempio, $\left[\frac{3}{2}\right] = 2$ oppure $\left[\sqrt{5}\right] = 3$. Sia d la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$. Verificare che $[d]$ data da

$$[d](x; y) = [d(x; y)]$$

è una distanza su $\mathbb{R}^2$.
Sol.)

♣ $[d](x; y) \geq 0$ perchè l'arrotondamento per eccesso di un numero positivo non può essere mai negativo.

♣ $[d](x; y) = 0$ se e solo se $x = y$, perchè l'arrotondamento per eccesso di un numero non negativo può essere 0 se e solo se il numero stesso è 0.

♣ $[d](x; y) = [d(x; y)] = [d(y; x)] = [d](y; x)$.

♣ $[d](x; y) = [d(x; y)] \leq [d(x; z) + d(z; y)] \leq [[d(x; z)] + [d(z; y)]] =$

$= [d(x; z)] + [d(z; y)]$.

Nota bene: nell'ultimo passaggio le parentesi quadrate esterne sono state rimosse perchè il loro contenuto è già intero.

b) Dire quali sono le bocce per la distanza $[d]$ aventi centro nell'origine.

Sol.) Se $0 < r \leq 1$ è il raggio della boccia, l'unico punto $x \in \mathbb{R}^2$ tale che $[d]\,(x;0) < r$ è l'origine stessa: se prendiamo un qualsiasi punto x staccato dall'origine, la sua distanza arrotondata "schizza" immediatamente ad un valore non inferiore ad 1. Quindi, una prima boccia per l'origine è $\{0\}$.

Se $1 < r \leq 2$ è il raggio della boccia, i punti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $[d]\,(x;0) < r$ sono quelli per cui la distanza euclidea è ≤ 1. Non appena si prende un punto x' tale che $d\,(x';0) = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, la distanza arrotondata "schizza" immediatamente ad un valore non inferiore a 2. Quindi, una seconda boccia per l'origine è $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Se $2 < r \leq 3$ è il raggio della boccia, i punti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $[d]\,(x;0) < r$ sono quelli per cui la distanza euclidea è ≤ 2. Non appena si prende un punto x' tale che $d\,(x';0) = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, la distanza arrotondata "schizza" immediatamente ad un valore non inferiore a 2. Quindi, una seconda boccia per l'origine è $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Proseguendo in questo modo, si vede che le bocce centrate nell'origine sono $\{0\}$ e tutti i cerchi di raggio intero (con il loro bordo, però!)

c) Dimostrare che $[d]$ è topologicamente equivalente alla distanza discreta su $\mathbb{R}^2$, ma non è algebricamente equivalente alla stessa.

Sol.) Con un ragionamento simile a quello del punto precedente, si vede che ogni punto $\{x\}$ è una boccia centrata in sè stesso per la distanza arrotondata $[d]$. Ora, sia B una boccia centrata in x per la distanza discreta d_D. Allora, $B' = \{x\}$, che è una boccia centrata in sè stesso per la distanza arrotondata $[d]$, è contenuto in B. Viceversa, data una boccia C centrata in x per la distanza arrotondata $[d]$, $C' = \{x\}$, che è una boccia centrata in sè stesso per la distanza discreta, è contenuto in C. Abbiamo verificato l'equivalenza topologica:

ogni boccia della distanza discreta ne contiene una per la distanza arrotondata (avente lo stesso centro), e

ogni boccia della distanza arrotondata ne contiene una per la distanza discreta (avente lo stesso centro).

L'equivalenza algebrica implicherebbe di trovare una costante α tale che $[d] \leq \alpha d_D$, indipendentemente dalla coppia di punti scelta. Questo è però impossibile perchè la distanza discreta è limitata, la distanza arrotondata no.

3 Geometria analitica - solo per matematici.

In $\mathbb{R}^3$, sia data la famiglia di quadriche Q_t di equazione:

$$x^2 + 2y^2 + 2txz + 4z + 1 = 0,$$

a) la si classifichi al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.
Sol.) La matrice completa è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è $-8 - 2t^2$, e quindi non si annulla mai.
La matrice dei termini di secondo grado è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è $-2t^2$.

Per $t \neq 0$, il determinante di B è negativo e il determinante di A è negativo (non tutti gli autovalori di A hanno lo stesso segno, dunque), e quindi la quadrica (essendo non degenere) è un iperboloide a 2 falde. Per $t = 0$, A ha un autovalore nullo e due positivi, dunque è un paraboloide ellittico.

b) Posto $t = 0$, scrivere l'equazione del piano tangente alla quadrica nel punto $P = (1; 1; -1)$ (dopo aver verificato che il punto stia sulla quadrica).

Sol.) Il punto sta sulla quadrica, che per $t = 0$ ha equazione:

$$x^2 + 2y^2 + 4z + 1 = 0:$$

$1\,(1) + 2\,(1) + 4\,(-1) + 1 = 0.$
Il piano tangente in P è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$
$$x + 2y + 2z - 1 = 0.$$

4 Forme bilineari.

Si consideri la forma bilineare in $\mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a.) Scrivere esplicitamente $g_C\left((x_1; y_1; z_1); (x_2; y_2; z_2)\right)$, dove $(x_1; y_1; z_1)$ e $(x_2; y_2; z_2)$ sono le componenti di due vettori di $\mathbb{R}^3$ espresse rispetto alla base standard.

Sol.) $g_C\left((x_1; y_1; z_1); (x_2; y_2; z_2)\right) =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$= (x_1 + y_1 + z_1)\, x_2 + (x_1 + y_1 + z_1)\, y_2 + (x_1 + y_1 + z_1)\, z_2.$

b) Trovare una matrice ortogonale P tale che ${}^t(P) \cdot C \cdot P$ sia diagonale.

Sol.) In questo caso, dato che viene richiesto che P sia ortogonale, è megio procedere cercando gli autovettori. Infatti, C è simmetrica, e quindi ammette una base ortonormale di autovettori. Mettendo tale base sulle colonne di P, avremo risolto il problema.

Gli autovalori di C sono 0 (doppio) e 3. I corrispondenti autovettori sono: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per $\lambda = 3$ e $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per $\lambda = 0$. Notiamo due cose:

1) il primo vettore non ha lunghezza 1, quindi dobbiamo dividerlo per $\sqrt{3}$.

2) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ non formano una base ortonormale per l'autospazio con $\lambda = 0$. Per ovviare a ciò, eseguiamo il procedimento di Gram-Schmidt rispetto al prodotto scalare standard. Troviamo:

$\overrightarrow{w_1} = (-1; 1; 0);$

$\overrightarrow{w_2} = (-1; 0; 1) - \frac{\langle(-1;0;1);(-1;1;0)\rangle}{2}(-1; 1; 0) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right).$

Normalizzando i due vettori $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ e mettendoli sulle colonne 2 e 3 di P, otteniamo la matrice richiesta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

c) Dire se la forma bilineare così descritta è un prodotto scalare.

Sol.) ${}^t(P) \cdot C \cdot P$ ha gli autovalori sulla diagonale, cioè

$$ {}^t(P) \cdot C \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Essendoci degli elementi nulli, la forma bilineare non è definita positiva, e quindi non è un prodotto scalare.

d) Supponiamo ora che la matrice C sia intesa a coefficienti complessi, e che, quindi, rappresenti una forma sesquilineare in $\mathbb{C}^3$, rispetto alla corrispondente base standard). Scrivere esplicitamente tale forma $h_C((x_1; y_1; z_1); (x_2; y_2; z_2))$, dove $(x_1; y_1; z_1)$ e $(x_2; y_2; z_2)$ sono le componenti di due vettori di $\mathbb{C}^3$ espresse rispetto alla base standard.

Sol.) $h((x_1; y_1; z_1); (x_2; y_2; z_2)) =$

$$ = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_2} \\ \overline{y_2} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = $$

$$ = (x_1 + y_1 + z_1)\overline{x_2} + (x_1 + y_1 + z_1)\overline{y_2} + (x_1 + y_1 + z_1)\overline{z_2}. $$

5 Superfici.

Data la superficie di Enneper in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$ \alpha(u; v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2; v - \frac{v^3}{3} + vu^2; u^2 - v^2 \right), $$

$(u; v) \in \mathbb{R}^2$, calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto. In particolare, stabilire per ogni valore dei parametri $(u; v)$ se $\alpha(u; v)$ è un punto ellittico, parabolico o iperbolico. Calcolare inoltre le curvature principali e la curvatura media in ogni punto.

Sol.)

$$ \begin{gathered} \alpha_u = (1 - u^2 + v^2; 2uv; 2u); \\ \alpha_v = (2uv; 1 - v^2 + u^2; -2v); \\ \tfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} = (-2u; 2v; 2); \\ \tfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} = (2u; -2v; -2); \\ \tfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = (2v; 2u; 0). \end{gathered} $$

La prima forma fondamentale è

$$G=\begin{pmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Il vettore normale è:

$$\overrightarrow{N}=\frac{\left(-2u;2v;1-u^2-v^2\right)}{1+u^2+v^2}.$$

La matrice della seconda forma fondamentale è, allora,

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice dell'applicazione di Weingarten è

$$L=\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le curvature principali sono $\pm\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$; la curvatura media è 0 e la curvatura Gaussiana è $-\frac{1}{(1+u^2+v^2)^4}$. In particolare, tutti i punti sono iperbolici.

6 Compattezza.

Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono compatti per successioni, rispetto alla distanza indotta da quella euclidea, e motivare le risposte.

$\diamondsuit$ $C_1=[0;1]\times[0;1]$

Si tratta di un quadrato chiuso in $\mathbb{R}^2$, quindi è compatto (è chiuso e limitato).

$\diamondsuit$ $C_2=[0;1)\times[0;1)$

Non è compatto perchè non è chiuso.

$\diamondsuit$ $C_3=\mathbb{R}\times\{0\}$

Non è compatto perchè non è limitato.

$\diamondsuit$ $C_4=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

Non è compatto perchè non è nè chiuso nè limitato.

$\diamondsuit$ $C_5=C_4\cap([0;1]\times[0;1])$

Non è compatto perchè è limitato ma non è chiuso.

Dire inoltre se C_1 e C_5 sono connessi e/o connessi per archi.

C_1 è connesso per archi, dunque è anche connesso.

C_5 non è connesso: i due insiemi $A=\left\{(x;y)\in C_5 : x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ e $B=\left\{(x;y)\in C_5 : x>\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ sono disgiunti, non vuoti e aperti per la topogia indotta su C_5, essendo intersezioni di aperti di $\mathbb{R}^2$ con C_5. Inoltre, la loro unione è C_5, dato che $\frac{\sqrt{2}}{2}$ non è un numero razionale.