Prova scritta di Geometria - B

Tempo: 2h+20m. (Fisica) + 20 m. (Matematica)

1.) (**10** punti) Si consideri la funzione

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$d(x; y) = \begin{cases} 0 & se \quad x = y \\ \\ d_E(x; y) + 4 & se \quad x \neq y \end{cases},$$

dove d_E è la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$.

a.) Scrivere la definizione di distanza su $\mathbb{R}^2$.

b.) Verificare che d è una distanza su $\mathbb{R}^2$.

c.) Scrivere la definizione di equivalenza topologica tra distanze su $\mathbb{R}^2$.

d.) Disegnare le bocce $B_2((0; 0))$, $B_4((0; 0))$ e $B_8((0; 0))$ per d.

e.) Verificare che d è topologicamente equivalente alla distanza discreta su $\mathbb{R}^2$.

2.) (**6** punti) Si considerino gli insiemi

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \, |y| \leq 1\},$$
$$E = \{(x; y) \in D : x \neq 0\}.$$

Dire se i seguenti sottoinsiemi sono connessi e/o compatti per successioni, rispetto alla distanza indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$:

a.) D.

b.) E.

c.) $E \cup \{(0; 0)\}$.

d.) $E \cup \{(0; q) : -1 \leq q \leq 1, \, q \in \mathbb{Q}\}$.

3.) (**10** punti) Sia data la curva:

$$\gamma : [-10; 10] \to \mathbb{R}^3,$$
$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} cos(s) - \frac{1}{\sqrt{2}}; sin(s); \frac{1}{\sqrt{2}} cos(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

a.) Verificare che la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

b.) Verificare che la curva è piana, e trovare il piano in cui è contenuta.

c.) Verificare che il centro di curvatura è costante.

d.) Calcolare il raggio di curvatura in ogni punto. Di quale curva si tratta?

☞

4.) (**6** punti.) Data la superficie:

$$\alpha : \mathbb{R} \times (-\infty; 0) \to \mathbb{R}^3,$$
$$\alpha(u; v) = \left(u; \frac{v^2}{2}; \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right),$$

a.) calcolare il piano tangente affine nel punto $P = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$;

b.) calcolare la matrice della prima forma fondamentale in P, rispetto alla base canonica $\{\overrightarrow{\alpha_u}; \overrightarrow{\alpha_v}\}$;

c.) calcolare il vettore normale in P.

5.) (**M**ATEMATICA) Si consideri la conica in $\mathbb{R}^2$ data da:

$$x^2 + 3y^2 - 4x + y + 1 = 0,$$

a.) dire se la conica è degenere;

b.) dire di quale tipo di conica si tratta;

c.) scrivere l'equazione canonica.

N.B. Si possono svolgere i punti precedenti nell'ordine preferito.

Soluzioni.

PROBLEMA 1.)

a.) $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una distanza se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $d(x; y) \geq 0$, $\forall x; y \in \mathbb{R}^2$
2. $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x; y) = d(y; x)$, $\forall x; y \in \mathbb{R}^2$
4. $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$, $\forall x; y; z \in \mathbb{R}^2$.

b.) E' facile verificare le prime tre proprietà, dato che sono soddisfatte anche dalla distanza euclidea.

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, ci sono diversi casi.

i.)$x = y = z$;

ii.)$x = y \neq z$, nel qual caso si vede subito che $0 \leq d(x; z) + d(y; z)$;

iii.) $x = z \neq y$, nel qual caso la disuguaglianza triangolare si scrive: $d(x; y) \leq 0 + d(y; z)$ e poi si pone, nel membro di destra, $z = x$;

iv.) $y = z \neq x$, che si dimostra nello stesso modo;

v.) $x; y; z$ sono tre punti distinti, nel qual caso si ha:

$d(x; y) = d_E(x; y) + 4 \leq d_E(x; z) + d_E(z; y) + 4 \leq$

$\leq d_E(x; z) + d_E(z; y) + 4 + 4 = d(x; z) + d(z; y)$.

c.) d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti se per ogni boccia $B_{\delta,d_1}(p)$ esiste una boccia $B_{\delta',d_2}(p)$ contenuta in $B_{\delta,d_1}(p)$, e viceversa, per ogni boccia $B_{\varepsilon,d_2}(p)$ esiste una boccia $B_{\varepsilon',d_1}(p)$ contenuta in $B_{\varepsilon,d_2}(p)$.

d.) $B_2((0; 0))$ e $B_4((0; 0))$ si riducono alla sola origine. $B_8((0; 0))$ è un disco (senza bordo) di raggio 4 centrato nell'origine.

e.) d è topologicamente equivalente alla distanza discreta, dato che, per entrambe le distanze, i singoli punti sono anche bocce.

PROBLEMA 2.)

D è connesso e compatto, perchè è connesso per archi, chiuso e pure limitato.

E è sconnesso, perchè si suddivide in due aperti non vuoti e disgiunti: $E \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e $E \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. E non è compatto perchè non è chiuso.

$E \cup \{(0;0)\}$ e $E \cup \{(0;q) : -1 \leq q \leq 1,\ q \in \mathbb{Q}\}$ sono connessi perchè sono connessi per archi (l'origine funge da "ponte"). Essi non sono compatti per successioni, in quanto non sono chiusi (ad esempio, il punto $(0; 1/\sqrt{2})$ sta nella chiusura di entrambi, senza essere contenuto in alcuno dei due insiemi).

PROBLEMA 3.)

$\gamma'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin(s); cos(s); -\frac{1}{\sqrt{2}}sin(s)\right)$.

$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{2}sin^2(s) + cos^2(s) + \frac{1}{2}sin^2(s)} = 1$, e quindi la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

$\overrightarrow{T(s)} = \gamma'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin(s); cos(s); -\frac{1}{\sqrt{2}}sin(s)\right)$.

$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}cos(s); -sin(s); -\frac{1}{\sqrt{2}}cos(s)\right)$.

$\kappa(s) = \|\overrightarrow{T}'(s)\| = 1$.

Il raggio di curvatura è l'inverso della curvatura e vale 1 costantemente.

$\overrightarrow{N(s)} = \frac{\gamma''(s)}{1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}cos(s); -sin(s); -\frac{1}{\sqrt{2}}cos(s)\right)$.

Il centro di curvatura resta fissato e vale

$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\overrightarrow{(}N(s)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\overrightarrow{B(s)} = \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Essendo $\overrightarrow{B(s)}$ costante, la torsione $\tau(s)$ è nulla, e così la curva è piana.

Il piano che contiene la curva è $x - z + \sqrt{2} = 0$, e può essere calcolato osservando semplicemente l'equazione, oppure sapendo che esso è il piano perpendicolare a $\overrightarrow{B}$ e contenente il punto $\gamma(0) = \left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

La curva ha centro e raggio di curvatura costanti e giace su un piano, quindi non può essere altro che un pezzo di circonferenza.

PROBLEMA 4.)

$\overrightarrow{\alpha_u}(u; v) = (1; 0; 2u)$;

$\overrightarrow{\alpha_v}(u; v) = (0; v; -v^2)$.
Nel punto $P = \alpha(0; -1)$, si ha $\overrightarrow{\alpha_u}(0; -1) = (1; 0; 0)$ e $\overrightarrow{\alpha_v}(0; -1) = (0; -1; -1)$.
$\overrightarrow{\alpha_u(0; -1)} \wedge \overrightarrow{\alpha_v(0; -1)} = (0; 1; -1)$.
Il vettore normale richiesto è allora $N(0; -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 1; -1)$.

Analogamente, nel punto $P = \alpha(0; -1)$, la matrice associata alla prima forma fondamentale risulta essere:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il piano affine tangente alla superficie in S è sicuramente perpendicolare ad $\overrightarrow{N}(0; -1)$, e quindi ha la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z + d = 0.$$

Imponendo che contenga $P = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$, si ottiene $d = -\frac{1}{6\sqrt{2}}$, ovvero il piano ✉ di equazione:

$$6y - 6z - 1 = 0.$$

⚽ ⚽ ⚽ ⚽ ⚽

PROBLEMA 5.)
La conica si può scrivere come:

$$(x-2)^2 - 4 + 3[(y + 1/6)^2 - 1/(36)] + 1 = 0;$$
$$(x-2)^2 + 3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{37}{12} = 0.$$

Con il cambiamento di riferimento:

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + \frac{1}{6} \end{cases},$$

si trova l'equazione canonica:

$$X^2 + 3Y^2 - \frac{37}{12} = 0.$$

Quindi, la conica studiata è un ellisse reale e non-degenere (un modo alternativo per verificare la non-degenerazione sarebbe stato il controllo del non-annullamento del determinante della matrice associata alla conica).

☺