Prova scritta di Geometria.

TEMPO: 2h+10m. (FISICA) + 30 m. (MATEMATICA)

PROBLEMA 1.) (5 punti.)
Sia data la forma bilineare

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R},$$

espressa, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, da:
$g((x_1; x_2; x_3); (y_1; y_2; y_3)) = 7x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 7x_2y_2 + 2x_3y_3$,
a.) Scrivere la matrice associata rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$;
b.) Dire se la forma bilineare è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$;
c.) Scrivere la matrice associata rispetto alla base

$$\{(1; -1; 0); (1; 1; 0); (0; 0; 1)\}.$$

PROBLEMA 2.) (13 punti.)
Sia data su $\mathbb{R}^2$ l'applicazione data da:

$$d((x_1; x_2); (y_1; y_2)) = \begin{cases} |y_1 - x_1| \text{ se } x_2 = y_2 \\ \\ |y_1 - x_1| + 1 \text{ se } x_2 \neq y_2 \end{cases}.$$

a.) Scrivere la definizione di distanza su $\mathbb{R}^2$;
b.) Verificare che d è una distanza;
c.) Scrivere la definizione di "boccia di raggio r centrata nell'origine" per la distanza d;
d.) Disegnare le bocce $B_{\frac{1}{2}}((0; 0))$; $B_1((0; 0))$; $B_3((0; 0))$.
e.) Scrivere la definizione di equivalenza topologica tra due distanze su $\mathbb{R}^2$.
f.) Verificare che d non è topologicamente equivalente alla distanza euclidea d_E in $\mathbb{R}^2$;
g.) Verificare che d non è topologicamente equivalente alla distanza discreta d_D in $\mathbb{R}^2$;
h.) Scrivere la definizione di "funzione continua" tra spazi metrici;
i.) Verificare che l'identità

$$Id. : (\mathbb{R}^2; d_E) \longmapsto (\mathbb{R}^2; d)$$

non è un'applicazione continua.

PROBLEMA 3.) (10 punti.)
Data la curva nello spazio

$$\gamma : [-5; 5] \longmapsto \mathbb{R}^3,$$

$\gamma(t) = (at - t^3; 3t^2; 3t + t^3)$,
a.) Trovare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana, e trovare, per tale valore, l'equazione del piano che la contiene;
b.) Posto $a = 3$, determinare curvatura, torsione e la terna di Frenet-Serre per un generico punto di essa.

PROBLEMA 4.) (4 punti.)
Scrivere la definizione di "superficie regolare" nello spazio $\mathbb{R}^3$. Dire poi se la superficie

$$\alpha : U \longmapsto \mathbb{R}^3,$$
$$\alpha(u; v) = (u + v; u^2 + v^2; e^{u+v})$$

è regolare, quando $U = (0; 2) \times (0; 2)$

PROBLEMA 5.) (MATEMATICA)
Riconoscere la conica in $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 1 = 0$$

e determinare il cambiamento di riferimento che la riduce in forma canonica.

Soluzioni.

PROBLEMA 1.)
Dato che
$g((1;0;0);(1;0;0)) = 7;$
$g((1;0;0);(0;1;0)) = 7;$
$g((1;0;0);(0;0;1)) = 0;$
$g((0;1;0);(1;0;0)) = 7;$
$g((0;1;0);(0;1;0)) = 7;$
$g((0;1;0);(0;0;1)) = 0;$
$g((0;0;1);(1;0;0)) = 0;$
$g((0;0;1);(0;1;0)) = 0;$
$g((0;0;1);(0;0;1)) = 2,$
la matrice associata è:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è simmetrica, quindi la forma bilineare è simmetrica. Gli autovalori di C sono 0, 2 e 14. Essi non sono tutti strettamente positivi, quindi la forma bilineare non è un prodotto scalare.

c.)
Dato che
$g((1;-1;0);(1;-1;0)) = 0;$
$g((1;-1;0);(1;1;0)) = 0;$
$g((1;-1;0);(0;0;1)) = 0;$
$g((1;1;0);(1;-1;0)) = 0;$
$g((1;1;0);(1;1;0)) = 28;$
$g((1;1;0);(0;0;1)) = 0;$
$g((0;0;1);(1;-1;0)) = 0;$
$g((0;0;1);(1;1;0)) = 0;$
$g((0;0;1);(0;0;1)) = 2,$
la matrice associata rispetto alla nuova base è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 2.)
a.) $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una distanza se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $d(x;y) \geq 0$, $\forall x;y \in \mathbb{R}^2$
2. $d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x;y) = d(y;x)$, $\forall x;y \in \mathbb{R}^2$
4. $d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$, $\forall x;y;z \in \mathbb{R}^2$.

b.) Le prime tre proprietà si verificano facilmente. Quanto alla quarta, si procede nel seguente modo:

siano $x = (x_1;x_2)$; $y = (y_1;y_2)$; $z = (z_1;z_2)$. Ecco i principali casi da esaminare:

I) $x_2 = y_2 = z_2$, nel qual caso il problema si riduce a considerare la disuguaglianza triangolare per il valore assoluto:

$$|y_1 - x_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|,$$

che è sempre vera.

II) $x_2 = y_2 \neq z_2$, nel qual caso si deve dimostrare che:

$$|y_1 - x_1| \leq |x_1 - z_1| + 1 + |z_1 - y_1| + 1,$$

che è sempre vero;

III) $x_2 = z_2 \neq y_2$, nel qual caso si deve dimostrare che:

$$|y_1 - x_1| + 1 \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + 1,$$

che è sempre vero;

IV) $x_2 \neq z_2 = y_2$, che si dimostra nello stesso modo;

V) $x_2; y_2$ e z_2 sono tre numeri distinti. Allora, si deve dimostrare che:

$$|y_1 - x_1| + 1 \leq |x_1 - z_1| + 1 + |z_1 - y_1| + 1,$$

che è sempre vero.

c.) $B_r\left((0;0)\right) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d\left(p;O\right) < r\}$.

d.) $B_{\frac{1}{2}}\left((0;0)\right)$ è il solo segmento, privato degli estremi, congiungente $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ e $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

$B_{\frac{1}{2}}\left((0;0)\right) = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \times \{0\}$.

$B_1\left((0;0)\right)$ è il solo segmento, privato degli estremi, congiungente $(-1;0)$ e $(1;0)$.

$B_1\left((0;0)\right) = (-1;1) \times \{0\}$.

$B_3\left((0;0)\right) = (-2;2) \times \mathbb{R}$ è una striscia verticale larga 4 unità.

e.) d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti se per ogni boccia $B_{\delta,d_1}(p)$ esiste una boccia $B_{\delta',d_2}(p)$ contenuta in $B_{\delta,d_1}(p)$, e viceversa, per ogni boccia $B_{\varepsilon,d_2}(p)$ esiste una boccia $B_{\varepsilon',d_1}(p)$ contenuta in $B_{\varepsilon,d_1}(p)$.

f.) d non è topolodicamente equivalente a d_E: nella boccia

$$B_{\frac{1}{2};d}\left((0;0)\right) = \left(-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right) \times \{0\}$$

non è possibile "introdurre" una boccia euclidea.
g.) d non è topolodicamente equivalente a d_E: nella boccia

$$B_{\frac{1}{2};d_D}\left((0;0)\right) = \{(0;0)\}$$

non è possibile "introdurre" alcuna boccia per la distanza d.
h.) Siano $(X;d_X)$ e $(Y;d_Y)$ due spazi metrici. Un'applicazione

$$f : (X;d_X) \longmapsto (Y;d_Y)$$

è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto in X, per ogni aperto $A \subseteq Y$.
i.) $Id^{-1}\left(B_{\frac{1}{2};d}\left((0;0)\right)\right)$ è la controimmagine di un aperto per la distanza d, ma

$$B_{\frac{1}{2};d}\left((0;0)\right) = \left(-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right) \times \{0\}$$

non è aperto per la distanza d_E.

PROBLEMA 3.)
$\gamma'(t) = (a - 3t^2; 6t; 3 + 3t^2)$;
$\gamma''(t) = (-6t; 6; 6t)$;
$\gamma'''(t) = (-6; 0; 6)$.
$\langle (\gamma' \wedge \gamma'')(t); \gamma'''(t) \rangle = 36\,(a+3)$.
Dunque, la curva è piana se $a = -3$. Per tale valore, la curva ha equazione parametrica:

$$\gamma(t) = (-3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3),$$

e quindi il piano che la contiene si vede subito essere $x + z = 0$.
$\|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{2}\,(1+t^2)$;
$(\gamma' \wedge \gamma'')(t) = (18\,(t^2-1); -2t; 1+t^2)$;
$\|(\gamma' \wedge \gamma'')\|(t) = 18\sqrt{2}\,(1+t^2)$;
$\langle (\gamma' \wedge \gamma'')(t); \gamma'''(t) \rangle = 216$;
$\kappa(t) = \tau(t) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$;
$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2(1+t^2)}\,(1-t^2; 2t; 1+t^2)$;
$\overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{1+t^2}\,(-2t; 1-t^2; 0)$;
$\overrightarrow{B}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2(1+t^2)}\,(t^2-1; -2t; t^2+1)$.

PROBLEMA 4.)

La superficie è regolare se:
1.) α è di classe $\mathcal{C}^2$;
2.) α è iniettiva;
3.) $\overrightarrow{\alpha_u}$ e $\overrightarrow{\alpha_v}$ sono linearmente indipendenti.

Nel nostro caso,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha_u} &= (1; 2u; e^{u+v});\\ \overrightarrow{\alpha_v} &= (1; 2v; e^{u+v}),\end{aligned}$$

e così, nel punto $\alpha\,(1;1)$ la superficie non è regolare, dato che $\overrightarrow{\alpha_u} = \overrightarrow{\alpha_v}$.

PROBLEMA 5.)
La matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

e il determinante è 2. Dunque, la conica non è degenere.
La matrice dei termini di secondo grado è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono $\lambda = -1$, con autovettore associato $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, e $\lambda = 3$, con autovettore associato $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
Se $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la rotazione effettuata è:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) \\ \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{X} + \overline{Y}\right) \end{cases}.$$
L'equazione della conica è:
$-\overline{X}^2 + 3\overline{Y}^2 + \sqrt{2}\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) + 1 = 0;$
$-\left(\overline{X}^2 - \sqrt{2}X + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 3\left(\overline{Y}^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{Y} + \frac{1}{18} - \frac{1}{18}\right) + 1 = 0;$
$-X^2 + 3Y^2 + \frac{4}{3} = 0$, dove

$$\begin{cases} X = \overline{X} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ Y = \overline{Y} - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{cases}.$$

La conica è un'iperbole reale.
Si ha:

$$\begin{cases} \overline{X} = X + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \overline{Y} = Y + \frac{\sqrt{2}}{6} \end{cases}.$$

Quindi, sostituendo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X - Y \right) + \frac{1}{3} \\ \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{X} + \overline{Y} \right) + \frac{2}{3} \end{cases}.$$