Prova scritta di Geometria.

Fac-simile.

DURATA: 2h+10m. (FISICA) + 25 m. (MATEMATICA)

1.) (**6 punti**) Data la forma bilineare espressa rispetto alla base standard

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g\left((x_1; x_2; x_3); (y_1; y_2; y_3)\right) =$$
$$= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$

a.) scrivere la matrice associata rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$;
b.) dire se g è un prodotto scalare;
c.) scrivere la matrice associata rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ data da:

$$\{(1; 0; 0); (0; 1; 1); (0; 0; 1)\}.$$

2.) (**10 punti**) Siano $(X; d_X)$ e $(Y; d_Y)$ due spazi metrici.

a.) Scrivere la definizione di funzione continua da $(X; d_X)$ in $(Y; d_Y)$ in un punto $x_0 \in X$.

b.) Dati due punti distinti $y; z \in Y$, verificare che esistono due bocce per d_Y, una centrata in y e l'altra centrata in z, la cui intersezione è vuota.

c.) Siano $f; g : (X; d_X) \longrightarrow (Y; d_Y)$ due funzioni continue in ogni punto. Verificare che

$$A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

è aperto in X rispetto a d_X.

3.) (**9 punti**) Si consideri la curva

$$\gamma : [-10; 10] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\gamma(t) = \left(2t; t^2; \frac{1}{3}t^3\right).$$

Calcolare curvatura e torsione della curva nel punto $P = (6; 9; 9)$.

4.) (**7 punti**) Sia $\alpha : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, e sia

$$\beta : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\beta(s) = (\lambda \cdot \alpha_1(s); \lambda \cdot \alpha_2(s); \lambda \cdot \alpha_3(s)),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

ATTENZIONE: s è l'ascissa curvilinea per α ma non per β.

Siano κ_α e τ_α la curvatura e la torsione di α, κ_β e τ_β la curvatura e la torsione di β. Verificare, applocando le formule per la curvatura e la torsione di curve a velocità arbitraria, che:

a.) $\kappa_\beta(s) = \dfrac{1}{\lambda}\kappa_\alpha(s)$;

b.) $\tau_\beta(s) = \dfrac{1}{\lambda}\tau_\alpha(s)$.

5.) (**Matematica**) Verificare che la conica di equazione

$$x^2 - 2y^2 + xy - x + y = 0$$

è degenere, e determinare la (o le) retta/e da cui è costituita.

Soluzioni.

PROBLEMA 1.)
a.) $g\left((1;0;0);(1;0;0)\right)=2$;
$g\left((1;0;0);(0;1;0)\right)=2$;
$g\left((1;0;0);(0;0;1)\right)=0$;
$g\left((0;1;0);(1;0;0)\right)=2$;
$g\left((0;1;0);(0;1;0)\right)=2$;
$g\left((0;1;0);(0;0;1)\right)=0$;
$g\left((0;0;1);(1;0;0)\right)=0$;
$g\left((0;0;1);(0;1;0)\right)=0$;
$g\left((0;0;1);(0;0;1)\right)=1$.
La matrice associata alla base standard è:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.) La forma è bilineare perchè la sua espressione è data da polinomi omogenei di grado 2 in $\{x_i y_j\}$. Essa è simmetrica perchè la matrice C è simmetrica. Non è però definita positiva perchè gli autovalori di C sono:
$\lambda=0$;
$\lambda=1$;
$\lambda=4$,
e quindi non sono tutti positivi.
Dunque, g non è un prodotto scalare.
c.) $g\left((1;0;0);(1;0;0)\right)=2$;
$g\left((1;0;0);(0;1;1)\right)=2$;
$g\left((1;0;0);(0;0;1)\right)=0$;
$g\left((0;1;1);(1;0;0)\right)=2$;
$g\left((0;1;1);(0;1;1)\right)=3$;
$g\left((0;1;1);(0;0;1)\right)=1$;
$g\left((0;0;1);(1;0;0)\right)=0$;
$g\left((0;0;1);(0;1;1)\right)=1$;
$g\left((0;0;1);(0;0;1)\right)=1$.
La matrice associata è

$$C'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 2.)

a.) Sia $x_0 \in X$. $f : (X; d_X) \longrightarrow (Y; d_Y)$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, se $x \in B_{\delta, d_X}(x_0)$, allora $f(x) \in B_{\varepsilon, d_Y}(f(x_0))$, ovvero

$$f(B_{\delta, d_X}(x_0)) \subseteq B_{\varepsilon, d_Y}(f(x_0)).$$

b.) Sia $r = \dfrac{d_Y(y,z)}{3} > 0$. Prendo le bocce $B_{r;d_Y}(y)$ e $B_{r;d_Y}(z)$. Verifico che le due bocce sono disgiunte: supponiamo per assurdo che $w \in B_{r;d_Y}(y) \cap B_{r;d_Y}(z)$. Allora,

$$d_Y(y; w) < r = \frac{d_Y(y,z)}{3}$$

e

$$d_Y(z; w) < r = \frac{d_Y(y,z)}{3}.$$

Ma, per la disuguaglianza triangolare, d'altra parte, deve essere

$$d_Y(y,z) \leq d_Y(y;w) + d_Y(z;w),$$
$$d_Y(y,z) \leq \frac{d_Y(y,z)}{3} + \frac{d_Y(y,z)}{3} = \frac{2}{3} d_Y(y,z).$$

Questo è impossibile, perchè $d_Y(y,z) > 0$, quindi w non può esistere, e $B_{r;d_Y}(y) \cap B_{r;d_Y}(z) = \emptyset$.

c.) Prendo un punto $x \in A$, e verifico che esiste una boccia D_x centrata in x e contenuta in A. L'unione delle bocce D_x al variare di $x \in A$ sarebbe quindi A, provando così che A è aperto. Sia dunque $x \in A$. Chiamo $y = f(x)$ e $z = g(x)$. Prendiamo le bocce $B_{r;d_Y}(y)$ e $B_{r;d_Y}(z)$ tali che $B_{r;d_Y}(y) \cap B_{r;d_Y}(z) = \emptyset$. Per la continuità di f e di g, troviamo $B_{\delta;d_X}(x)$ tale che $f(B_{\delta;d_X}(x)) \subseteq B_{r;d_Y}(y)$ e $B_{\delta';d_X}(x)$ tale che $g(B_{\delta';d_X}(x)) \subseteq B_{r;d_Y}(z)$. Se si sceglie $D_x = B_{\zeta;d_X}(x)$, dove $\zeta = min\{\delta; \delta'\}$, $f(D_x) \subseteq B_{r;d_Y}(y)$ e $g(D_x) \subseteq B_{r;d_Y}(z)$. Pertanto, $f(D_x) \cap g(D_x) = \emptyset$, cioè f e g assumono valori differenti in ogni punto di D_x. Quindi, $D_x \subseteq A$.

PROBLEMA 3.)

$\gamma'(t) = (2; 2t; t^2)$;
$\gamma''(t) = (0; 2; 2t)$;
$\gamma'''(t) = (0; 0; 2)$.
$\|\gamma'(t)\| = 2 + t^2$;
$(\gamma' \wedge \gamma'')(t) = (2t^2; -4t; 4)$;
$\|\gamma' \wedge \gamma''\|(t) = 2(t^2 + 2)$.

$\kappa(t) = \dfrac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} = \dfrac{2}{(t^2+2)^2}$.
$\tau(t) = \dfrac{\langle \gamma' \wedge \gamma''; \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} = \dfrac{2}{(2+t^2)^2}$.
Nel punto $P = (6; 9; 9) = \gamma(3)$, si ha
$\kappa(3) = \tau(3) = \dfrac{2}{121}$.

PROBLEMA 4.)
$\overrightarrow{\beta'(s)} = (\lambda \cdot \alpha_1'(s); \lambda \cdot \alpha_2'(s); \lambda \cdot \alpha_3'(s)) = \lambda\overrightarrow{\alpha'(s)}$.
Analogamente,
$\overrightarrow{\beta''(s)} = \lambda\overrightarrow{\alpha''(s)}$ e $\overrightarrow{\beta'''(s)} = \lambda\overrightarrow{\alpha'''(s)}$.
$\kappa_\beta(s) = \dfrac{\|\beta' \wedge \beta''\|(s)}{\|\beta'(s)\|^3} = \dfrac{\|(\lambda\alpha') \wedge (\lambda\alpha'')\|(s)}{\|(\lambda\alpha')(s)\|} =$
$= \dfrac{\lambda^2}{\lambda^3}\dfrac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|(s)}{\|\alpha'(s)\|^3} = \dfrac{1}{\lambda}\kappa_\alpha(s)$.
$\tau_\beta(s) = \dfrac{\langle \beta' \wedge \beta''; \beta''' \rangle(s)}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2(s)} = \dfrac{\langle (\lambda\alpha') \wedge (\lambda\alpha''); (\lambda\alpha''') \rangle(s)}{\|(\lambda\alpha') \wedge (\lambda\alpha'')\|^2(s)} =$
$= \dfrac{\lambda^3}{\lambda^4}\dfrac{\langle (\alpha') \wedge (\alpha''); (\alpha''') \rangle(s)}{\|(\alpha') \wedge (\alpha'')\|^2(s)} = \dfrac{1}{\lambda}\tau_\alpha(s)$.

PROBLEMA 5.)
La matrice associata alla conica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di B è 0, quindi la conica è degenere.
La matrice dei coefficienti di secondo grado è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è $-\dfrac{9}{4} < 0$, quindi la conica è una coppia di rette incidenti.
La conica si può scrivere come:

$$x^2 + (y-1)x + y - 2y^2 = 0.$$

Risolvo l'equazione di secondo grado in x.

$$x = \frac{1 - y \pm \sqrt{1 + y^2 - 2y - 4y + 8y^2}}{2} = \frac{1 - y \pm (3y - 1)}{2}.$$

Le due rette sono quindi $x = y$ e $x = -2y + 1$, ovvero, in forma implicita, la conica è l'unione delle due rette:

$$\{x - y = 0\} \cup \{x + 2y - 1 = 0\},$$

incidenti nel punto $C = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.