Fac-simile
Prova scritta di Geometria.

TEMPO: 2h+10m per FISICA+35 m per MATEMATICA.

PROBLEMA 1.) (9 punti)
Sia data su $\mathbb{R}^2$ la funzione:

$$\begin{gathered} d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ d\left((x_1; x_2) ; (y_1, y_2)\right) = \\ = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \end{gathered}$$

a.) Verificare che d è una distanza su $\mathbb{R}^2$.
b.) Dire quando due distanze d_1 e d_2 su $\mathbb{R}^2$ sono algebricamente equivalenti.
c.) Verificare che d è algebricamente equivalente alla distanza euclidea d_E su $\mathbb{R}^2$.

PROBLEMA 2.) (7 punti)
Dire se i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi e/o compatti per successioni, rispetto alla distanza indotta da quella euclidea:
☎$= \{(0;0)\}$;
✆$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
✈$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$;
✉$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : xy \in \mathbb{Q}\}$.

PROBLEMA 3.) (6 punti)
Sia $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare, parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Siano κ e τ, rispettivamente, la curvatura e la torsione di γ. Verificare che:

$$\gamma'''(s) = -\kappa^2(s)\overrightarrow{T} + \kappa'(s)\overrightarrow{N} + \kappa(s)\tau(s)\overrightarrow{B}.$$

PROBLEMA 4.) (10 punti)
Sia data la superficie

$$\begin{gathered} \alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3; \\ \alpha(u;v) = \left(u; \frac{v^2}{2}; \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right). \end{gathered}$$

a.) Dire la superficie è regolare quando $U = \mathbb{R}^2$;

b.) Dire la superficie è regolare quando $U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$;

c.) Calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto, quando $U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$;

d.) Dire quali sono i punti ellittici, parabolici ed iperbolici, quando $U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

PROBLEMA 5.) (**MATEMATICA**)

Classificare la quadrica di equazione

$$3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0$$

e trovare una rotazione ed una traslazione applicando le quali la quadrica si scriva in forma canonica.

Soluzioni

PROBLEMA 1.)
a.) Dimostro che d è una distanza:

- $d(x;y) \geq 0$, $\forall x;y \in \mathbb{R}^2$, perchè è somma di addendi positivi.
- Ovviamente, $d(x;y) = 0$ se e solo se $x = y$.
- Si vede subito che $d(x;y) = d(y;x)$.
- Se $P;Q;S \in \mathbb{R}^2$, $P = (p_1;p_2)$; $Q = (q_1;q_2)$; $S = (s_1;s_2)$, si ha:

$$d(P;S) \leq d(P;Q) + d(Q;S).$$

Infatti,

$$\begin{gathered} d((p_1;p_2);(s_1;s_2)) \leq \\ \leq |q_1 - p_1| + |q_2 - p_2| + |s_1 - q_1| + |s_2 - q_2| + \\ \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} + \sqrt{(s_1 - q_1)^2 + (s_2 - q_2)^2}. \end{gathered}$$

Ciò segue dalla disuguaglianza triangolare per i valori assoluti e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza euclidea.

b.) Due distanze d_1 e d_2 su $\mathbb{R}^2$ sono algebricamente equivalenti se esistono delle costanti $k_1;k_2 > 0$ tali che

$$\begin{gathered} k_1 d_1(P;Q) \leq d_2(P;Q) \leq k_2 d_1(P;Q), \\ \forall\ P;Q \in \mathbb{R}^2. \end{gathered}$$

c.) Sia d_E la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$. Ovviamente,

$$d_E(P;Q) \leq d(P;Q),\ \forall\ P;Q \in \mathbb{R}^2.$$

Viceversa, dato che $|q_1 - p_1| + |q_2 - p_2| \leq d_E((p_1;p_2);(q_1;q_2))$, si vede subito che

$$\frac{1}{2} d(P;Q) \leq d_E(P;Q).$$

Quindi,

$$\tfrac{1}{2} d(P;Q) \leq d_E(P;Q) \leq d(P;Q).$$

PROBLEMA 2.)

☎ è compatto per successioni, perchè è chiuso e limitato. ✆;✈ e ✉ non sono illimitati, dunque non possono essere compatti per successioni.

☎ e ✆ sono connessi perchè sono connessi per archi. ✈ è sconnesso, perchè è unione di due aperti:

$F =$✈$\cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, e $G =$✈$\cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

I due aperti (per la distanza indotta) sono disgiunti e non vuoti (dato che ciascuno è un ramo dell'iperbole equilatera).

✉ è sconnesso, perchè è unione di due aperti:

$V =$✉$\cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : xy > \pi\}$, e $W =$✉$\cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : xy < \pi\}$.

PROBLEMA 3.)

Derivo tre volte:

$$\gamma'(s) = \overrightarrow{T}(s);$$
$$\gamma''(s) = \frac{d}{ds}\overrightarrow{T}(s) = \kappa(s)\overrightarrow{N}.$$
$$\gamma'''(s) = \kappa'(s)\overrightarrow{N} + \kappa(s)\frac{d}{ds}\left(\overrightarrow{N}(s)\right).$$

Applico la formula di Frenet-Serre.

$$\gamma'''(s) = -\kappa^2(s)\overrightarrow{T} + \kappa'(s)\overrightarrow{N} + \kappa(s)\tau(s)\overrightarrow{B}.$$

PROBLEMA 4.)

$\overrightarrow{\alpha_u}(u;v) = (1;0;u)$; $\overrightarrow{\alpha_v} = (0;v;-v^2)$. I vettori $\overrightarrow{\alpha_u}$ e $\overrightarrow{\alpha_v}$ non sono linearmente indipendenti se $v = 0$, mentre, se $v \neq 0$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & v & -v^2 \end{pmatrix}$$

ha sempre rango 2.

α è sempre iniettiva: se $\alpha(u_1;v_1) = \alpha(u_2;v_2)$, allora deve sempre essere $u_1 = u_2$, perchè la prima componente deve essere uguale. A questo punto, per avere uguaglianza tra $\frac{u_1^2}{2} - \frac{v_1^3}{3}$ e $\frac{u_2^2}{2} - \frac{v_2^3}{3}$, dato $u_1 = u_2$, deve obbligatoriamente essere $v_1 = v_2$. Quindi, $(u_1;v_1) = (u_2;v_2)$.

c.) La matrice della prima forma fondamentale è:

$$G = \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv^2 \\ -uv^2 & v^4+v^2 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{N} = \dfrac{(-uv; v^2; v)}{|v|\sqrt{u^2+v^2+1}}.$

La matrice della seconda forma fondamentale è:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-v}{|v|\sqrt{u^2+v^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{|v|\sqrt{u^2+v^2+1}} \end{pmatrix}.$$

$K(u; v) = -\dfrac{1}{v\left(v^2+1+u^2\right)^2}.$

d.) I punti ellittici sono quelli per cui $v < 0$. I punti iperbolici sono quelli per cui $v > 0$.

PROBLEMA 5.)

La matrice dei termini di secondo grado è:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono:

$\lambda = 1$, con corrispondente autovettore, già normalizzato, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$;

$\lambda = 4$, con corrispondente autovettore, già normalizzato, $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$;

$\lambda = -2$, con corrispondente autovettore, già normalizzato, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

La matice di rotazione è, allora,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Con il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{X} + \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{Y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{X} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{Y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{Z} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{X} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{Y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{Z} \end{cases},$$

la quadrica diventa:

$$\overline{X}^2 + 4\overline{Y}^2 - 2\overline{Z}^2 + \frac{10}{\sqrt{3}}\overline{X} - \frac{16}{\sqrt{6}}\overline{Y} - \frac{16}{\sqrt{2}}Z - 9 = 0;$$
$$\left(\overline{X} + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\left(\overline{Y} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(\overline{Z} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - 9 - \frac{25}{3} - \frac{8}{3} + 16 = 0;$$
$$\left(\overline{X} + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\left(\overline{Y} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(\overline{Z} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 = 0;$$
e, con la traslazione
$$\begin{cases} X = \overline{X} + \frac{5}{\sqrt{3}} \\ Y = \overline{Y} - \frac{2}{\sqrt{6}} \\ Z = \overline{Z} + \frac{4}{\sqrt{2}} \end{cases},$$
si ottiene la forma canonica di un iperboloide a una falda:
$X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 = 4.$