1 Distanze.

a.) Sia X uno spazio dotato di due distanze, d_1 e d_2. E' vero che $d(x; y)$ data da

$$d(x; y) = d_1(x; y) + d_2(x; y)$$

è una distanza su X?

b.) Sia $(X; d)$ uno spazio metrico. E' vero che d^2 è una distanza, dove

$$d^2(x; y) = (d(x; y))^2$$

2 Connessione e compattezza

Dire se i seguenti insiemi sono connessi (rispetto alla topologia indotta dalla metrica euclidea):

- ♣ $A_1 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 > 0\}$;
- ♣ $A_2 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 > 0\}$;
- ♣ $A_3 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$;
- ♣ $A_4 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 > 0\}$;

Dire se i seguenti insiemi sono compatti (rispetto alla topologia indotta dalla metrica euclidea):

- ♠ $C_1 = \mathbb{R}^4 \setminus A_1$;
- ♠ $C_2 = \mathbb{R}^4 \setminus A_2$;
- ♠ $C_3 = \mathbb{R}^4 \setminus A_3$;
- ♠ $C_4 = \mathbb{R}^4 \setminus A_4$;

3 Forme bilineari.

Si consideri la forma bilineare rappresentata, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a.) Trovare una matrice P tale che ${}^t(P) \cdot C \cdot P$ sia diagonale.

b.) Dire se la forma bilineare così descritta è un prodotto scalare.

c.) Esiste una base rispetto alla quale la matrice associata alla forma bilineare sia la matrice identica I? Se sì, scriverla.

4 Curve.

4.1 Problema 1

Data la curva in $\mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \left(t; 2t; t^2\right),$$

con $t \in [-10; 10]$, determinare curvatura e torsione in ogni punto dell'intervallo $(-10; 10)$. Verificare che la curva è regolare ed è piana, e scrivere l'equazione del piano su cui essa giace.

4.2 Problema 2

Sia $\gamma(s)$, $s \in [a; b]$, una curva in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata con l'**ascissa curvilinea**, e sia $\delta(s) = \gamma'(s)$. Se $\kappa(s)$ è la funzione curvatura della curva γ e $v(s)$ è la funzione velocità della curva δ, verificare che

$$v(s) = \kappa(s), \quad \forall s \in (a; b).$$

5 Superfici.

Data la superficie in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\alpha(u; v) = (u + v; u - v; uv),$$

$(u; v) \in \mathbb{R}^3$, calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto. In particolare, dire se $(0; 0; 0) = \alpha((0; 0))$ è un punto ellittico, parabolico o iperbolico. Calcolare inoltre le curvature principali, la curvatura media e la curvatura principale nel punto $(2; 0; 1)$.

6 Geometria analitica - solo per MATEMATICA.

In $\mathbb{R}^3$, data la quadrica Q di equazione

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z + 1 = 0,$$

a) la si classifichi e se ne determini l'equazione canonica e il sistema di riferimento canonico;

b) si esprima, nelle coordinate canoniche di Q, l'equazione del piano π dato da

$$y - z = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

c) verificate che la conica $E = \pi \cap Q$ è un'ellisse;

d) determinate la lunghezza degli assi di E.