L'ellisse

Fisso nel piano due punti distinti, F ed F'. Si dice ELLISSE di FUOCHI F ed F' l'insieme:

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P; F) + dist(P; F') = 2a\}.$$

Se $dist(F; F') = 2c$, fisso un sistema di assi cartesiano tale che l'asse x sia la retta passante per F ed F', orientata nella direzione da F' a F, e l'asse y sia l'asse di simmetria del segmento $\overline{FF'}$. In tal modo, abbiamo $F = (c; 0)$ e $F' = (-c; 0)$. Rispetto a tale riferimento, l'ellisse diventa l'insieme dei punti $P = (x; y)$ tali che

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a; \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \\
c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx = a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2cx + a^2c^2; \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).
\end{gathered}$$

Deve essere $a > c$, e quindi si pone: $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Si ottiene così l'EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE:

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si noti che tale equazione è stata ottenuta rispetto ad un riferimento privilegiato, detto RIFERIMENTO CANONICO.

OSSERVAZIONE

Se $P = (x; y)$ sta sull'ellisse, anche i punti di coordinate $(x; -y)$; $(-x; y)$ e $(-x; -y)$ soddisfano la stessa equazione, e pertanto stanno sulla curva. Dunque, gli assi x e y sono gli assi di simmetria della conica. L'asse che contiene i fuochi si dice ASSE FOCALE.

Le intersezioni dell'ellisse con gli assi cartesiani determinano 4 punti:

$$A' = (-a; 0);\ A = (a; 0);\ B' = (0; -b);\ B = (0; b).$$

Essi sono detti VERTICI dell'ellisse.

L'origine O è detta CENTRO dell'ellisse. Essa è l'intersezione dei due assi di simmetria.

Si verifica inoltre che l'ellisse è contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette:

$$x = -a;\ x = a;\ y = -b;\ y = b.$$

Riepilogo sull'ellisse

$\mathcal{CASO\ A}$

Data l'ellisse di equazione

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1,$$

se $a > b$ allora:

- Il Centro è $C = O = (0; 0)$.
- I Vertici sono $A' = (-a; 0)$; $A = (a; 0)$; $B' = (0; -b)$; $B = (0; b)$.
- I fuochi si trovano sull'asse x (l'asse orizzontale) e hanno coordinate $F' = (-c; 0)$ e $F = (c; 0)$, dove

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$\mathcal{CASO\ B}$

Data l'ellisse di equazione

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1,$$

se $b > a$ allora:

- Il Centro è $C = O = (0; 0)$.
- I Vertici sono $A' = (-a; 0)$; $A = (a; 0)$; $B' = (0; -b)$; $B = (0; b)$.
- I fuochi si trovano sull'asse y (l'asse verticale) e hanno coordinate $F' = (0; -c)$ e $F = (0; c)$, dove

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

OSSERVAZIONE (EQUAZIONE PARAMETRICA).

In entrambi i casi, i punti dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sono tutti e soli i punti della forma $P = (x; y)$, con

$$\begin{cases} x = a \cdot cos(t) \\ y = b \cdot sin(t) \end{cases}, \ 0 \le t < 2\pi.$$

ESERCIZI

1) Trovare l'ellisse di centro O, avente $dist(A;O) = 6$ e $dist(B;O) = 5$.

2) Trovare i vertici ed i fuochi dell'ellisse $x^2 + 16y^2 = 4$.

3) Trovare l'equazione dell'ellisse avente fuochi $F = (2;1)$ e $F' = (0;1)$, e passante per $Q = (1;2)$.

4) Trovare i vertici ed i fuochi dell'ellisse di equazione $5x^2 + (y-7)^2 = 3$.

5) Scrivere l'equazione dell'ellisse avente due vertici relativi allo stesso asse nei punti $O = A' = (0;0)$ e $A = (6;0)$ e passante per il punto $P = (1;1)$. Trovare riferimento ed equazione canonici e determinare le formule di trasformazione da un riferimento all'altro.

6) Scrivere l'equazione dell'ellisse avente fuochi $F' = (0;1)$ e $F = (1;0)$ e passante per $O = (0;0)$. Trovare il riferimento canonico e la relativa equazione canonica.

7) Scrivere l'equazione del luogo di punti del piano tali che le distanze dai punti $A = (1;0)$ e $B = (-1;0)$ abbiano un rapporto costante pari a $k = 3$. Verificare che tale luogo è una circonferenza, e determinarne centro e raggio. Esiste qualche valore di k per cui tale luogo non è una circonferenza?

SOLUZIONI

1) $\left(\frac{x^2}{36}\right) + \left(\frac{y^2}{25}\right) = 1$.

2) $A' = (-2;0)$; $A = (2;0)$; $B' = (0;-\frac{1}{2})$; $B = (0;\frac{1}{2})$. $F = (\frac{\sqrt{15}}{2};0)$; $F' = (-\frac{\sqrt{15}}{2};0)$.

3) $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

4) $C = (0;7)$; $A' = (-\sqrt{\frac{3}{5}};7)$; $A = (\sqrt{\frac{3}{5}};7)$; $B' = (0;7-\sqrt{3})$; $B = (0;7+\sqrt{3})$. $F = (0;7+2\sqrt{\frac{3}{5}})$; $F' = (0;7-2\sqrt{\frac{3}{5}})$.

5) Riferimento canonico: $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y \end{cases}$. Equazione canonica: $\frac{X^2}{9} + \frac{8}{9}Y^2 = 1$. Rispetto agli assi vecchi: $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}y^2 = 0$.

6) Equazione dell'ellisse: $3x^2+3y^2+2xy-4x-4y = 0$. Riferimento canonico: $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$. Equazione canonica: $X^2 + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1$.