Esercizi laboratorio di Geometria 1A

1) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

2) Trovare gli autovalori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

4) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

5) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

6) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

7) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

8) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

9) Considero le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esiste una matrice P tale che $P^{-1}AP = B$? In caso affermativo, scrivere P.

10) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -14 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ -9 & -18 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

12) Trovare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

13) Considero la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Trovare tutti i valori di k per i quali la matrice ha tutti gli autovalori reali. La matrice è diagonalizzabile per $k = 2$? E per $k = 0$?

Soluzioni.

1) Autovalori: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$.
Autovettori: L'autospazio associato a λ_1 è $Span\left\{(0; 0; 1)\right\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\left\{\left(-\frac{5}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)\right\}$.
L'autospazio associato a λ_3 è $Span\left\{(-2; 1; 0)\right\}$.
$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Autovalori: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 2 + 2\sqrt{3}$; $\lambda_4 = 2 - 2\sqrt{3}$.

3) Esiste un unico autovalore REALE: $\lambda = -2$. Il corrispondente autospazio è $Span\left\{(0; 0; 1)\right\}$. P non esiste.

4) Autovalori: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -1$ (doppio).
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\left\{(1; 1; -1)\right\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\left\{(1; 0; -1); (0; 1; -1)\right\}$.

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5) Autovalori: $\lambda_1=0$; $\lambda_2=-2$ (doppio).
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(1;1;0)\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\,\{(0;0;1)\}$.
La matrice P richiesta non esiste.

6) Autovalori: $\lambda_1=2$ (doppio); $\lambda_2=6$.
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(1;-1;0)\,(1;0;-1)\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\,\{(1;2;1)\}$.
$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7) Autovalori: $\lambda_1=3$ (doppio); $\lambda_2=1$.
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(1;1;0)\,(1;0;1)\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\,\{(2;-1;1)\}$.
$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) Autovalori: $\lambda_1=1$ (triplo).
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(1;0;0)\,;(0;0;1)\}$.
La matrice P richiesta non esiste.

9) $P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Autovalori: $\lambda_1=2$ (doppio); $\lambda_2=6$ (doppio).
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(0;1;0;1)\,;(-1;-1;1;0)\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\,\{(1;-1;0;1)\,;(1;0;1;0)\}$.

11) Autovalori: $\lambda_1=-3$; $\lambda_2=-1$; $\lambda_3=2$.
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(-2;1;0)\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\,\{(0;0;1)\}$.
L'autospazio associato a λ_3 è $Span\,\{(-7;6;-15)\}$.
$P=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}$. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

12) Autovalori: $\lambda_1=1$ (doppio); $\lambda_2=7$.
L'autospazio associato a λ_1 è $Span\,\{(1;0;1)\,;(1;1;-1)\}$.
L'autospazio associato a λ_2 è $Span\,\{(-1;2;1)\}$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

13) Per $k > \frac{1}{4}$, tutti gli autovalori sono reali.

Per $k = 0$, l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2 (è radice doppia del polinomio caratteristico), ma il suo autospazio ha dimensione 1 ed è generato da $(1; 0; 0; 0)$. Dunque, per $k = 0$ la matrice non ammette una base di autovettori. Pertanto, per $k = 0$, A non è diagonalizzabile.

Per $k = 2$, l'autovalore $\lambda = -1$ ha molteplicità algebrica 2 (è radice doppia del polinomio caratteristico), ma il suo autospazio ha dimensione 1 ed è generato da $(0; 1; 0; 0)$. Dunque, per $k = 2$ la matrice non ammette una base di autovettori. Pertanto, per $k = 2$, A non è diagonalizzabile.