

Abstract

Qui viene affrontato lo studio delle curve nel piano e nello spazio, con particolare interesse verso due invarianti: la curvatura e la torsione. Il primo ci dice "quanto la curva si allontana dall'essere una retta"; il secondo ci dice quanto la curva "si allontana dall'essere contenuta su un piano".

Lo studio delle curve è importante in fisica, perchè le curve rappresentano le traiettorie di sistemi fisici.

1 Definizione: lunghezza di una curva.

Una **curva** in \mathbb{R}^n è un'applicazione

$$\gamma : [a; b] \mapsto \mathbb{R}^n,$$

che sia **continua** (su tutto $[a; b]$) e \mathcal{C}^∞ a tratti. La prima condizione significa che la curva "non si spezza in alcun punto". La seconda condizione significa che la curva è sempre \mathcal{C}^∞ , tranne che in un numero **finito** di punti $p_1; p_2; \dots; p_{m-1}$ contenuti nell'intervallo $[a; b]$.

Ora, sia Δ una **partizione** dell'intervallo $[a; b]$. Questo significa che $[a; b]$ è suddiviso in sottointervallini $\{[t_0; t_1]; [t_1; t_2]; \dots; [t_{k-1}; t_k]\}$, con $t_0 = a$ e $t_k = b$. Si definisce

$$\ell_\Delta(\gamma) = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

$\|\cdot\|$ è il simbolo che indica la lunghezza di un vettore.

DEFINIZIONE.

La **lunghezza della curva** $\gamma : [a; b] \mapsto \mathbb{R}^n$ è

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

dove $\gamma'(t)$ è il vettore che si ottiene derivando tutte le componenti di $\gamma(t)$: se

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t); \dots; \gamma_n(t)),$$

allora

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t); \gamma'_2(t); \dots; \gamma'_n(t)).$$

TEOREMA

$$\ell(\gamma) = \sup_{\Delta} (\ell_{\Delta}(\gamma)).$$

L'estremo superiore è calcolato sull'insieme di tutte le possibili partizioni **finite** dell'intervallo $[a; b]$.

Dim. (cenni) - Si osservi prima di tutto che, se una partizione viene "raffinata" in una nuova partizione Δ' ottenuta aggiungendo ulteriori suddivisioni di ciascun intervallino $[t_{i-1}; t_i]$ in sottointervallini $\{[s_0; s_1]; [s_1; s_2]; \dots; [s_{h-1}; t_h]\}$, $\ell_{\Delta'}(\gamma) \geq \ell_{\Delta}(\gamma)$. Tale osservazione è analoga al fatto che la lunghezza di una circonferenza viene approssimata per difetto dalla lunghezza di un poligono inscritto, e l'approssimazione migliora all'aumentare del numero dei suoi lati.

Ora, su ciascun intervallino $[t_{i-1}; t_i]$, si ha, per il Teorema di Lagrange (applicato a ciascuna componente), $\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \gamma'(\xi_i)$, dove ξ_i è un punto di $[t_{i-1}; t_i]$. Alla fine,

$$\begin{aligned} \ell_{\Delta}(\gamma) &= \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| |t_i - t_{i-1}| = \\ &= \sum_{i=1}^k \|\gamma'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Al raffinarsi della partizione, questa quantità si avvicina sempre di più all'area del sottografico della funzione ad una variabile reale $\|\gamma'(t)\|$, e la somma tende all'integrale corrispondente. Quindi,

$$\sup_{\Delta} (\ell_{\Delta}(\gamma)) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \blacksquare$$

ESEMPIO

Sia $\gamma : [0; 3] \mapsto \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t \cos(t); e^t \sin(t); e^t)$.

$\gamma'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t); e^t \sin(t) + e^t \cos(t); e^t)$.

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2 + (e^t)^2} = \sqrt{3} e^t.$$

$$\int_0^3 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} e^3 - \sqrt{3}.$$

La lunghezza della curva è $\ell(\gamma) = \sqrt{3} e^3 - \sqrt{3}$. \blacksquare

ESERCIZI

1.) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0; \frac{\pi}{4}] \mapsto \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(t; \log\left(\frac{1}{\cos(t)}\right) \right).$$

2.) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0; \frac{1}{2}] \mapsto \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t; \frac{1}{2}t^2).$$

3.) Calcolare la lunghezza di una generica curva

$$\gamma : [a; b] \mapsto \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t; f(t)),$$

dove f è una qualsiasi funzione definita in $[a; b]$.

4.) Sia $\beta : [0; 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ una curva.

Sia poi $\gamma(t) = (\lambda \cdot \beta_1(t); \lambda \cdot \beta_2(t); \lambda \cdot \beta_3(t))$ una nuova curva, con $\lambda > 0$ costante positiva. Esprimere la lunghezza di γ in funzione della lunghezza di β (γ è la dilatazione di β) per la costante λ .

5.) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma(t) = (a \cdot \cos(t); a \cdot \sin(t); bt).$$

SOLUZIONI

1.) $\log(\sqrt{2} + 1)$.

2.) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1))$.

3.) $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

4.) $\ell(\gamma) = \lambda \cdot \ell(\beta)$.

5.) $\sqrt{a^2 + b^2}$.

TEOREMA

La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Dim.) Sia $\beta(s) = \gamma(\theta(s))$, dove $\theta : [c; d] \mapsto [a; b]$ è una funzione \mathcal{C}^∞ . Si ha:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \gamma'(\theta(s)) \cdot \theta'(s), \\ \|\beta'(s)\| &= \|\gamma'(\theta(s))\| \cdot |\theta'(s)|. \end{aligned}$$

Allora, $\ell(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds$. Sono possibili due casi.

CASO A.

$\theta'(s) > 0$. Allora, θ è sempre crescente, e $\theta(c) = a$; $\theta(d) = b$.

$$\ell(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_c^d \|\gamma'(\theta(s))\| \cdot |\theta'(s)| \cdot ds;$$

$$\ell(\beta) = \int_c^d \|\gamma'(\theta(s))\| \cdot \theta'(s) \cdot ds.$$

Eseguo il cambiamento di variabili: $t = \theta(s)$. Allora, $dt = \theta'(s) \cdot ds$. Così,

$$\ell(\beta) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \cdot dt = \ell(\gamma).$$

CASO \bar{B} .

$\theta'(s) < 0$. Allora, θ è sempre decrescente, e $\theta(c) = b$; $\theta(d) = a$.

$$\ell(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_c^d \|\gamma'(\theta(s))\| \cdot |\theta'(s)| \cdot ds;$$

$$\ell(\beta) = - \int_c^d \|\gamma'(\theta(s))\| \cdot \theta'(s) \cdot ds \text{ (il segno } - \text{ compare perchè } \theta'(s) < 0 \text{)}.$$

Eseguo il cambiamento di variabili: $t = \theta(s)$. Allora, $dt = \theta'(s) \cdot ds$.

Così,

$$\ell(\beta) = - \int_b^a \|\gamma'(t)\| \cdot dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \cdot dt = \ell(\gamma). \blacksquare$$

TEOREMA

Sia $\gamma : [a; b] \mapsto \mathbb{R}^n$ una curva **regolare**. Allora, esiste una riparametrizzazione di γ che ha velocità costante uguale ad 1.

Dim.) Fissiamo un punto qualsiasi $t_0 \in [a; b]$. Definiamo la funzione lunghezza:

$$s : [a; b] \mapsto \mathbb{R};$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Tale funzione è di classe \mathcal{C}^∞ . Sia C la funzione primitiva di $u \mapsto \|\gamma'(u)\|$. Allora, $s(t) = C(t) - C(t_0)$. Ma t_0 è fissato, quindi $s'(t) = C'(t) = \|\gamma'(t)\|$, $\forall t \in [a; b]$. s definisce una funzione \mathcal{C}^∞ a valori in un secondo intervallo $[c; d]$, avente derivata prima non nulla. Sia $\theta : [c; d] \mapsto [a; b]$ la funzione inversa. In ogni punto $s_1 = s(t_1) \in [c; d]$, si ha, per la formula di derivazione della funzione inversa,

$$\theta'(s_1) = \frac{1}{s'(t_1)} = \frac{1}{\|\gamma'(t_1)\|} > 0.$$

Di conseguenza, se $\beta(s) = \gamma(\theta(s))$ è una riparametrizzazione di γ ,

$$\|\beta'(s_1)\| = \|\gamma'(\theta(s_1))\| |\theta'(s_1)| = \|\gamma'(t_1)\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t_1)\|},$$

e così $\|\beta'(s_1)\| = 1$, e questo è vero in ogni punto dell'intervallo $[c; d]$. ■

Il parametro s si dice **ascissa curvilinea**, e una curva $\alpha(s)$ tale che $\|\alpha'(s)\| = 1$ in ogni punto dell'intervallo su cui α è definita si dice **a velocità unitaria**.

L'ascissa curvilinea non è univocamente definita: essa dipende dalla scelta del punto t_0 e dal "verso di percorrenza". Infatti, l'aggiunta di una costante e/o un cambiamento di segno: $\sigma = \pm\tau + (Kost.)$ dà ancora luogo ad una riparametrizzazione a velocità unitaria.

ESEMPIO

Consideriamo la curva (elica circolare):

$$\gamma : [-2\pi; 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma(t) = (a \cdot \cos(t); a \cdot \sin(t); bt).$$

$$\gamma'(t) = (-a \cdot \sin(t); a \cdot \cos(t); b), \text{ e}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 (\sin(t))^2 + a^2 (\cos(t))^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Possiamo porre, per esempio,

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du;$$

$$s(t) = \left[\sqrt{a^2 + b^2} u \right]_0^t = t\sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Pertanto,}$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

e una riparametrizzazione di γ a velocità unitaria è:

$$g(s) = \left(a \cdot \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right); a \cdot \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right); b \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \right),$$

$$g : \left[-2\pi\sqrt{a^2 + b^2}; 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\right] \mapsto \mathbb{R}^3.$$

ESERCIZI.

1.) Sia data la curva $\gamma : [-2\pi; 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t \cdot \cos(t); e^t \cdot \sin(t); e^t)$. Trovare l'ascissa curvilinea ed una parametrizzazione a velocità unitaria.

2.) Sia data la curva $\gamma : [-1; 1] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\frac{2}{1+t^2} - 1; \frac{2t}{1+t^2}\right)$. Trovare l'ascissa curvilinea ed una parametrizzazione a velocità unitaria. Dove è contenuta l'immagine di questa curva?

SOLUZIONI

- 1.) $s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1)$, $s \in [\sqrt{3}(e^{-2\pi} - 1); \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)]$.
 $g(s) = \left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cos \left(\log \left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \right); \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sin \left(\log \left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \right); \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)$,
 $g : [\sqrt{3}(e^{-2\pi} - 1); \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)] \mapsto \mathbb{R}^3$.
- 2.) $s(t) = 2 \cdot \arctan(t)$, $s \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.
 $g(s) = (\cos(s); \sin(s))$, $g : [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \mapsto \mathbb{R}^2$.
 Dunque, la curva è contenuta nella circonferenza unitaria di raggio 1.

2 Curve piane.

DEFINIZIONE

Sia $\gamma : [c; d] \mapsto \mathbb{R}^n$ una curva in \mathbb{R}^n , e sia $(a; b)$ un intervallo su cui la curva è \mathcal{C}^∞ . Un **campo di vettori** lungo γ è una funzione \mathcal{C}^∞ , $V : (a; b) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tale che $V(s) = (\gamma(s); v(s))$. $v(s)$ è un vettore "mobile" in \mathbb{R}^n che si muove lungo la curva con regolarità \mathcal{C}^∞ assumendo valori differenti in funzione del valore del parametro s . Nel seguito, indicheremo semplicemente con $v(s)$, senza scrivere esplicitamente il "punto base" $\gamma(s)$ (che può facilmente essere ricavato), il valore in s di un campo vettoriale. Ad esempio, $T(s_0)$ indicherà il valore del campo di vettori tangenti alla curva nel punto parametrizzato da s_0 . \square .

Sia ora $\gamma : [c; d] \mapsto \mathbb{R}^2$ una curva **regolare** in \mathbb{R}^2 , e sia $(a; b)$ un intervallo contenuto in $[c; d]$ su cui la curva è \mathcal{C}^∞ . Supponiamo che γ sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea s . Vogliamo costruire un **sistema di riferimento** mobile che si muove lungo la curva in modo solidale ad essa. Esso viene chiamato **sistema di riferimento mobile di Frenet-Serre**. Essendo un sistema di riferimento per \mathbb{R}^2 , esso è costituito da due campi vettoriali, $\{T(s); N(s)\}$.

Definiamo il **campo di vettori tangenti** a γ come $T(s) = \gamma'(s)$, dove $\gamma(s) = (\gamma_1(s); \gamma_2(s))$ e $\gamma'(s) = (\gamma_1'(s); \gamma_2'(s))$. Poichè γ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, $T(s)$ ha costantemente lunghezza 1.

Definiamo poi il **campo di vettori normali** a γ come $N(s) = (-\gamma_2'(s); \gamma_1'(s))$. Anche esso ha lunghezza costante pari ad 1, ed è ortogonale a $T(s)$ in ogni punto. I due campi di vettori $\{T(s); N(s)\}$ si muovono lungo la curva, formando in ogni punto un sistema di riferimento orientato positivamente (cio si può ottenere ruotando opportunamente gli assi cartesiani).

OSSERVAZIONE

Siano $\overrightarrow{v(s)}$ e $\overrightarrow{w(s)}$ due campi di vettori lungo γ . Il loro prodotto scalare è:

$$\langle \overrightarrow{v(s)}; \overrightarrow{w(s)} \rangle = v_1(s)w_1(s) + v_2(s)w_2(s) + \dots + v_n(s)w_n(s).$$

La derivata prima del prodotto scalare è, allora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \overrightarrow{v(s)}; \overrightarrow{w(s)} \rangle &= v'_1(s)w_1(s) + v_1(s)w'_1(s) + v'_2(s)w_2(s) + v_2(s)w'_2(s) + \\ &\dots + v'_n(s)w_n(s) + v_n(s)w'_n(s) = \langle \overrightarrow{v'(s)}; \overrightarrow{w(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{v(s)}; \overrightarrow{w'(s)} \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Abbiamo, dunque, $\overrightarrow{T(s)} = (\gamma'_1(s); \gamma'_2(s)); \overrightarrow{N(s)} = (-\gamma'_2(s); \gamma'_1(s))$. Sappiamo che $\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle = 1$ identicamente. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle \right) &= 0, \\ \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{T'(s)} \rangle &= 0; \\ 2 \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= 0; \\ \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ne deriva che $\overrightarrow{T'(s)}$ è ortogonale a $\overrightarrow{T(s)}$, e quindi è parallelo a $\overrightarrow{N(s)}$, per ogni valore del parametro s . Si ha, quindi, al variare del parametro s ,

$$\overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)},$$

per qualche scalare $\kappa(s)$ (dipendente dal parametro s). La funzione κ si dice **curvatura della curva**. Essa può assumere qualunque valore: positivo, negativo o nullo. Se valutata per $s = s_0$, $\kappa(s_0)$ si dice **curvatura** nel punto $\gamma(s_0)$. Abbiamo:

$$\overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)}.$$

Abbiamo, poi, $\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle = 0$ identicamente. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle \right) &= 0, \\ \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ma, $\overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)}$, per cui

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle &= 0; \\
\langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= -\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle; \\
\langle \kappa(s) \overrightarrow{N(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= -\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle; \\
\kappa(s) \langle \overrightarrow{N(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= -\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle; \\
\langle \overrightarrow{N'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= -\kappa(s).
\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{N(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle \right) &= 0, \\
\langle \overrightarrow{N'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{N(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle &= 0; \\
2 \langle \overrightarrow{N'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= 0; \\
\langle \overrightarrow{N'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Poichè $\{\overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N(s)}\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^2 , e $\overrightarrow{N'(s)}$ ha componente $-\kappa(s)$ nella direzione di $\overrightarrow{T(s)}$ e componente 0 nella direzione di $\overrightarrow{N(s)}$. Di conseguenza,

$$\overrightarrow{N'(s)} = -\kappa(s) \overrightarrow{T(s)}.$$

In conclusione, abbiamo ricavato il **sistema delle equazioni normali di Frenet-Serre**:

$$\begin{cases} \overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)} \\ \overrightarrow{N'(s)} = -\kappa(s) \overrightarrow{T(s)} \end{cases}.$$

Se $\kappa(s) \neq 0$, la quantità $\left| \frac{1}{\kappa(s)} \right|$ si dice **raggio di curvatura di γ** in $\gamma(s)$. Il punto $c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \overrightarrow{N}(s)$ si dice **centro di curvatura**, e la circonferenza di centro $c(s)$ e raggio $\left| \frac{1}{\kappa(s)} \right|$ si dice **cerchio osculatore** a γ in $\gamma(s)$. Se $\kappa(s) = 0$, per convenzione, si dice che il raggio di curvatura in $\gamma(s)$ è $+\infty$.

3 Curve piane a velocità arbitraria.

Sia $\alpha : [a; b] \mapsto \mathbb{R}^2$ una curva regolare a velocità arbitraria, e sia $\beta(s) = \alpha(t(s))$, $\beta : [c; d] \mapsto \mathbb{R}^2$, una sua riparametrizzazione mediante l'ascissa curvilinea s . La base mobile $\{\vec{T}; \vec{N}\}$ di Frenet-Serre è costruita sulla curva β seguendo il procedimento descritto nel paragrafo precedente; a questo punto, la base mobile in $t_0 \in [a; b]$ coincide con quella nel punto s_0 tale che $t_0 = t(s_0)$. La definizione è buona: ad ogni punto t_0 dell'intervallo $[a; b]$ (per la parametrizzazione a velocità arbitraria) corrisponde un unico punto s_0 per la parametrizzazione a velocità unitaria. Dunque, è naturale porre $\overrightarrow{T}(t_0) = \overrightarrow{T}(s_0)$; $\overrightarrow{N}(t_0) = \overrightarrow{N}(s_0)$; $\kappa(t_0) = \kappa(s_0)$, e i membri di destra sono già stati definiti, perchè si riferiscono ad una curva a velocità unitaria. Il problema è quello di calcolare direttamente $\overrightarrow{T}(t_0)$; $\overrightarrow{N}(t_0)$ e $\kappa(t_0)$, senza scrivere esplicitamente l'espressione di β (che potrebbe essere molto più complicata di α).

Nel punto $t_0 = t(s_0)$, abbiamo $\overrightarrow{\beta}'(s_0) = \overrightarrow{\alpha}'(t_0) \cdot t'(s_0)$. Per la dimostrazione del teorema sull'esistenza dell'ascissa curvilinea, sappiamo che $s'(t_0) = \|\alpha'(t_0)\|$. Poichè $t(s)$ è la funzione riparametrizzazione inversa, $t'(s_0) = \frac{1}{\|\alpha'(t_0)\|}$. Di conseguenza,

$$\overrightarrow{T}(t_0) = \overrightarrow{T}(s_0) = \overrightarrow{\beta}'(s_0) = \frac{\overrightarrow{\alpha}'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}.$$

Inoltre, se $\overrightarrow{T}(t_0) = (t_{1,0}; t_{2,0})$, allora $\overrightarrow{N}(t_0) = (-t_{2,0}; t_{1,0})$.

Abbiamo visto che, per ogni t , $\overrightarrow{\alpha}'(t) = \overrightarrow{T}(t) \cdot v(t)$, dove $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ è la funzione velocità. Allora,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha}''(t) &= \frac{d}{dt}(v(t)) \cdot \overrightarrow{T}(t) + v(t) \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{T}(t)) = \\ &= \frac{d}{dt}(v) \cdot \overrightarrow{T} + v(t) \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{T}(s(t))) = \\ &= \frac{d}{dt}(v) \cdot \overrightarrow{T} + v(t) \cdot \frac{d}{ds}(\overrightarrow{T}(s(t))) \cdot s'(t). \end{aligned}$$

Valutando tutto in t_0 , si ha:

$$\overrightarrow{\alpha}''(t_0) = \left(\frac{d}{dt}(v)\right)(t_0) \cdot \overrightarrow{T}(t_0) + (v(t_0))^2 \cdot \kappa(s_0) \cdot \overrightarrow{N}(t_0).$$

Infatti, la derivata del vettore tangente rispetto a s è $\kappa \cdot \overrightarrow{N}$, mentre $s'(t_0) = v(t_0)$. Facciamo il prodotto scalare tra $\overrightarrow{\alpha}''(t_0)$ e $\overrightarrow{N}(t_0)$. Sapendo che $\overrightarrow{T}(t_0)$ e $\overrightarrow{N}(t_0)$ sono ortogonali, e che \overrightarrow{N} ha lunghezza 1,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{\alpha''(t_0)}; \overrightarrow{N(t_0)} \rangle &= \langle (v(t_0))^2 \cdot \kappa(s_0) \cdot \overrightarrow{N(t_0)}; \overrightarrow{N(t_0)} \rangle = \\ &= (v(t_0))^2 \cdot \kappa(s_0) = (v(t_0))^2 \cdot \kappa(t_0).\end{aligned}$$

Omettendo di scrivere esplicitamente la dipendenza da t_0 , si ha

$$\kappa = \frac{\langle \overrightarrow{\alpha''}; \overrightarrow{N} \rangle}{\|\alpha'\|^2}.$$

4 Curve nello spazio.

Sia ora $\gamma : [c; d] \mapsto \mathbb{R}^3$ una curva **regolare** in \mathbb{R}^3 , e sia $(a; b)$ un intervallo contenuto in $[c; d]$ su cui la curva è \mathcal{C}^∞ . Supponiamo che γ sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea s . Vogliamo costruire un **sistema di riferimento** mobile che si muove lungo la curva in modo solidale ad essa. Esso viene chiamato **sistema di riferimento mobile di Frenet-Serre**. Essendo questa volta un sistema di riferimento per \mathbb{R}^3 , esso è costituito da tre campi vettoriali, $\{\overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N(s)}; \overrightarrow{B(s)}\}$.

Siano $\overrightarrow{v} = (v_1; v_2; v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1; w_2; w_3)$. Se $\{\overrightarrow{e}_1; \overrightarrow{e}_2; \overrightarrow{e}_3\}$ è la base standard di \mathbb{R}^3 , si definisce il **prodotto esterno** di \overrightarrow{v} e di \overrightarrow{w} come:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} &= \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \overrightarrow{e}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \overrightarrow{e}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \overrightarrow{e}_3.\end{aligned}$$

Esso è un vettore perpendicolare sia a \overrightarrow{v} che a \overrightarrow{w} . Il prodotto esterno $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ si annulla se e solo se \overrightarrow{v} e \overrightarrow{w} sono linearmente dipendenti.

Definiamo il **campo di vettori tangenti** a γ come $T(s) = \gamma'(s)$, dove $\gamma(s) = (\gamma_1(s); \gamma_2(s))$ e $\gamma'(s) = (\gamma'_1(s); \gamma'_2(s))$. Poichè γ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, $T(s)$ ha costantemente lunghezza 1.

Per andare avanti, adesso dovremo supporre che $\frac{d}{ds} (\overrightarrow{T(s)})$ non si annulli in alcun punto dell'intervallo $(a; b)$.

Sappiamo che $\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle = 1$ identicamente. Allora,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} (\langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle) &= 0, \\ \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{T'(s)} \rangle &= 0; \\ 2 \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= 0; \\ \langle \overrightarrow{T'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Ne deriva che $\overrightarrow{T'(s)}$ è ortogonale a $\overrightarrow{T(s)}$. Definiamo, al variare del parametro s ,

$$\overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)},$$

per qualche scalare $\kappa(s)$ (dipendente dal parametro s). La funzione κ si dice **curvatura della curva**. Essa può assumere **solo valori positivi**. Se valutata per $s = s_0$, $\kappa(s_0)$ si dice **curvatura** nel punto $\gamma(s_0)$. Abbiamo:

$$\overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)},$$

e questa relazione definisce anche il **vettore normale alla curva**, che è parallelo a $\overrightarrow{T'(s)}$, ha lunghezza 1 ed è concordemente orientato:

$$\overrightarrow{N(s)} = \frac{\overrightarrow{T'(s)}}{\|\overrightarrow{T'(s)}\|},$$

e
 $\kappa(s) = \|\overrightarrow{T'(s)}\|$.

Il **vettore binormale** è, allora,

$$\overrightarrow{B(s)} = \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)},$$

e si verifica facilmente che, essendo $\overrightarrow{T(s)}$ e $\overrightarrow{N(s)}$ ortonormali e di lunghezza 1, $\overrightarrow{B(s)}$ è anch'esso di lunghezza 1: esso è proprio il vettore che completa la nostra base ortonormale di Frenet-Serre.

Calcoliamo, ora, $\overrightarrow{N'(s)}$. Poichè $\{\overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{N(s)}; \overrightarrow{B(s)}\}$ è una base **ortonormale** per ogni scelta del parametro s , le componenti di $\overrightarrow{N'(s)}$ rispetto a tale base sono:

$$\overrightarrow{N'(s_0)} = a(s_0) \overrightarrow{T(s_0)} + b(s_0) \overrightarrow{N(s_0)} + c(s_0) \overrightarrow{B(s_0)},$$

dove

$$\begin{aligned} a(s_0) &= \langle \overrightarrow{N'(s_0)}; \overrightarrow{T(s_0)} \rangle; \\ b(s_0) &= \langle \overrightarrow{N'(s_0)}; \overrightarrow{N(s_0)} \rangle; \\ c(s_0) &= \langle \overrightarrow{N'(s_0)}; \overrightarrow{B(s_0)} \rangle. \end{aligned}$$

Calcoliamo dunque i prodotti scalari sopra indicati. Prima di tutto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle \right) &= 0, \\ \langle \overrightarrow{T}'(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle + \langle \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}'(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ma, $\overrightarrow{T}'(s) = \kappa(s) \overrightarrow{N}(s)$, per cui

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{T}'(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle + \langle \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}'(s) \rangle &= 0; \\ \langle \overrightarrow{T}'(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle &= - \langle \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}'(s) \rangle; \\ \langle \kappa(s) \overrightarrow{N}(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle &= - \langle \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}'(s) \rangle; \\ \kappa(s) \langle \overrightarrow{N}(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle &= - \langle \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}'(s) \rangle; \\ \langle \overrightarrow{N}'(s); \overrightarrow{T}(s) \rangle &= -\kappa(s). \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{N}(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle \right) &= 0, \\ \langle \overrightarrow{N}'(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle + \langle \overrightarrow{N}(s); \overrightarrow{N}'(s) \rangle &= 0; \\ 2 \langle \overrightarrow{N}'(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle &= 0; \\ \langle \overrightarrow{N}'(s); \overrightarrow{N}(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Infine, poniamo per definizione:

$$\langle \overrightarrow{N}'(s); \overrightarrow{B}(s) \rangle = \tau(s).$$

$\tau(s)$ è una funzione detta **torsione della curva**. Essa può assumere qualsiasi tipo di valore reale.

In conclusione,

$$\overrightarrow{N}'(s) = -\kappa(s) \overrightarrow{T}(s) + \tau(s) \overrightarrow{B}(s)$$

Resta ancora da calcolare $\overrightarrow{B}'(s)$. Abbiamo:

$$\overrightarrow{B}'(s_0) = a'(s_0) \overrightarrow{T}(s_0) + b'(s_0) \overrightarrow{N}(s_0) + c'(s_0) \overrightarrow{B}(s_0),$$

dove

$$\begin{aligned}
a'(s_0) &= \langle \overrightarrow{B'(s_0)}; \overrightarrow{T(s_0)} \rangle; \\
b(s_0) &= \langle \overrightarrow{B'(s_0)}; \overrightarrow{N(s_0)} \rangle; \\
c(s_0) &= \langle \overrightarrow{B'(s_0)}; \overrightarrow{B(s_0)} \rangle.
\end{aligned}$$

Ma,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle \right) &= 0, \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{T'(s)} \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Dato che $\overrightarrow{T'(s)} = \kappa(s) \overrightarrow{N(s)}$,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{T'(s)} \rangle &= 0; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= - \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{T'(s)} \rangle; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= - \langle \overrightarrow{B(s)}; \kappa(s) \overrightarrow{N(s)} \rangle; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= -\kappa(s) \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle = 0; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Successivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle \right) &= 0, \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Ma, $\overrightarrow{N'(s)} = -\kappa(s) \overrightarrow{T(s)} + \tau(s) \overrightarrow{B(s)}$, per cui

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle + \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle &= 0; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= - \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{N'(s)} \rangle; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= - \langle \overrightarrow{B(s)}; -\kappa(s) \overrightarrow{T(s)} + \tau(s) \overrightarrow{B(s)} \rangle; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= \kappa(s) \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{T(s)} \rangle - \tau(s) \langle \overrightarrow{B(s)}; \overrightarrow{B(s)} \rangle; \\
\langle \overrightarrow{B'(s)}; \overrightarrow{N(s)} \rangle &= 0 - \tau(s) = -\tau(s).
\end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(\langle \overrightarrow{B}(s); \overrightarrow{B}(s) \rangle \right) &= 0, \\ \langle \overrightarrow{B}'(s); \overrightarrow{B}(s) \rangle + \langle \overrightarrow{B}(s); \overrightarrow{B}'(s) \rangle &= 0; \\ 2 \langle \overrightarrow{B}'(s); \overrightarrow{B}(s) \rangle &= 0; \\ \langle \overrightarrow{B}'(s); \overrightarrow{B}(s) \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Alla fine, $\overrightarrow{B}'(s) = -\tau(s) \overrightarrow{N}(s)$.

Si trova così il sistema di equazioni di Frenet-Serre:

$$\begin{cases} \overrightarrow{T}'(s) = \kappa(s) \overrightarrow{N}(s) \\ \overrightarrow{N}'(s) = -\kappa(s) \overrightarrow{T}(s) + \tau(s) \overrightarrow{B}(s) \\ \overrightarrow{B}'(s) = -\tau(s) \end{cases} .$$

Sotto l'ipotesi che $\overrightarrow{T}'(s)$ sia ovunque non nullo, si ha $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in (a; b)$. Allora, $\frac{1}{\kappa(s)}$ è detto **raggio di curvatura** di γ in $\gamma(s)$. Il punto $c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \overrightarrow{N}(s)$ si dice **centro di curvatura** di γ in $\gamma(s)$.

Il piano vettoriale $\text{span} \{ \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{N}(s) \}$ si dice **piano osculatore** a γ in $\gamma(s)$. Esso, in quanto piano vettoriale, passa per l'origine, ma non necessariamente per il punto $\gamma(s)$ stesso. Allora si deve definire il **piano osculatore affine**: esso è il piano affine in \mathbb{R}^3 parallelo al piano osculatore, ma passante per il punto $\gamma(s)$. Esso è il piano che più si avvicina a contenere la curva data. Se la curva fosse piana, allora essa sarebbe tutta contenuta nel piano osculatore.

Il piano vettoriale $\text{span} \{ \overrightarrow{T}(s); \overrightarrow{B}(s) \}$ si dice **piano rettificante** di γ in $\gamma(s)$; il piano vettoriale $\text{span} \{ \overrightarrow{N}(s); \overrightarrow{B}(s) \}$ si dice **piano osculatore** a γ in $\gamma(s)$.

Ora, con i prossimi due teoremi, renderemo più chiaro che cosa rappresentano la curvatura e la torsione di una curva.

TEOREMA

Sia $\gamma(s)$ una curva parametrizzata a velocità unitaria avente curvatura nulla identicamente. Allora, la curva è contenuta in un pezzo di retta.

DTM.) Sappiamo che $\gamma'(s) = \overrightarrow{T(s)}$, e quindi $\frac{d}{ds}(\overrightarrow{T(s)}) = \gamma''(s) = \overrightarrow{0}$ (dato che la curvatura è nulla). La curva, allora, ha $\overrightarrow{T(s)}$ costante, $\overrightarrow{T(s)} = (v_1; v_2; v_3) = \gamma'(s)$. Ne segue che, integrando,

$$\gamma(s) = (v_1s + c_1; v_2s + c_2; v_3s + c_3).$$

Quindi, γ è contenuta in un pezzo di retta, passante per il punto $(c_1; c_2; c_3)$ e avente direzione $(v_1; v_2; v_3)$. ♣

TEOREMA.

Sia $\gamma(s)$ una curva parametrizzata a velocità unitaria, tale che $\frac{d}{ds}(\overrightarrow{T(s)}) \neq 0$. La curva è contenuta in un piano nell'intervallo $(a; b)$ se e solo se $\tau(s) = 0$ per ogni $s \in (a; b)$.

DTM.) Supponiamo dapprima che la curva sia contenuta nel piano $ax + by + cz + d = 0$. Siano $(\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3)$ le componenti di γ , e sia $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$. Abbiamo:

$$a\gamma_1(s) + b\gamma_2(s) + c\gamma_3(s) + d = 0.$$

Derivando rispetto ad s ,

$$a\gamma_1'(s) + b\gamma_2'(s) + c\gamma_3'(s) = 0.$$

Derivando ancora,

$$a\gamma_1''(s) + b\gamma_2''(s) + c\gamma_3''(s) = 0.$$

Ne segue che $\overrightarrow{\gamma'(s)}$ e $\overrightarrow{\gamma''(s)}$ sono entrambi perpendicolari a \overrightarrow{v} . Poichè $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{\gamma'(s)}$ e \overrightarrow{N} è parallelo a $\overrightarrow{\gamma''(s)}$, il piano osculatore è costante. Il versore \overrightarrow{B} è costante, perchè ha sempre lunghezza 1 ed è perpendicolare al piano osculatore. Dunque, $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = 0$. Dalla terza equazione di Frenet-Serre segue allora che $\tau(s) = 0$.

Viceversa, supponiamo che $\tau(s) = 0$ per ogni $s \in (a; b)$. Fissato $s_0 \in (a; b)$, definiamo la funzione

$$F(s) = \left\langle \left(\overrightarrow{\gamma(s)} - \overrightarrow{\gamma(s_0)} \right); \overrightarrow{B} \right\rangle.$$

\overrightarrow{B} è costante, perchè la torsione è identicamente nulla.

$$F'(s) = \langle \overrightarrow{\gamma'(s)}; \overrightarrow{B} \rangle = \langle \overrightarrow{T(s)}; \overrightarrow{B} \rangle = 0.$$

Dunque, F è costante. Vediamo quanto vale F in un punto. $F(s_0) = \langle \overrightarrow{0}; \overrightarrow{B} \rangle = 0$. Dunque, F vale costantemente 0. $(\overrightarrow{\gamma(s)} - \overrightarrow{\gamma(s_0)})$ appartiene costantemente al piano perpendicolare a \overrightarrow{B} , quindi γ è contenuta in un piano perpendicolare a \overrightarrow{B} (e passante per $\overrightarrow{\gamma(s_0)}$). ♣

Dai precedenti risultati, si vede che, in un certo senso, la curvatura "misura quanto una curva si distacchi dall'essere una retta", mentre la torsione "misura quanto una curva si allontana dall'essere contenuta in un piano".

CONTROESEMPIO

Consideriamo la curva:

$$g(t) = \begin{cases} (h(t); 0; t) & \text{per } t > 0 \\ (0; h(t); t) & \text{per } t < 0 \end{cases}, \quad g(0) = (0; 0; 0).$$

dove $h(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ per $t \neq 0$.

Studiamo la funzione

$$F(t) = \begin{cases} h(t) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}.$$

Vediamo quanto vale la sua derivata prima. Per $t < 0$, $F'(t) = 0$. Per $t > 0$, $F'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}$. Per $t = 0$, occorre calcolare il limite del rapporto incrementale. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0. \quad \text{Dunque, } F'(0) = 0.$$

$$F'(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}.$$

Procedendo in questo modo, si vede (dato che, per $x \rightarrow 0$, la funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}$ tende a 0 più velocemente di qualsiasi polinomio) che $F^{(k)}(0) = 0$ per ogni ordine di derivazione. In particolare, F è una funzione \mathcal{C}^∞ . Inoltre,

$$g(t) = (F(t); F(-t); t).$$

Pertanto, g è una curva \mathcal{C}^∞ . $g'(t) = (F'(t); -F'(-t); 1)$, quindi la curva è regolare. Abbiamo poi $g''(0) = (0; 0; 0)$, da cui si vede che $\frac{d}{ds} \left(\overrightarrow{T} \right) = 0$. La curva g ha torsione identicamente nulla, salvo che nel punto $t = 0$, dove $\frac{d}{ds} \left(\overrightarrow{T} \right) = 0$. In questo punto, la curva "sfugge" dal piano $y = 0$,

ed entra nel piano $x = 0$, dove la curva prosegue poi per $t > 0$. Dunque, complessivamente, la curva g **non è piana**.

Sia $\alpha : [a; b] \mapsto \mathbb{R}^3$ una curva regolare a velocità arbitraria, e sia $\beta(s) = \alpha(t(s))$, $\beta : [c; d] \mapsto \mathbb{R}^2$, una sua riparametrizzazione mediante l'ascissa curvilinea s . L'apparato di Frenet-Serre è stato definito per curve regolari a velocità unitaria. Quasi tutte le curve regolari che si considerano in pratica, però, non sono a velocità unitaria; una loro riparametrizzazione a velocità unitaria è solitamente molto complicata. Per questo motivo, è utile calcolare direttamente il sistema di riferimento senza conoscere una riparametrizzazione a velocità unitaria. La base mobile $\{\vec{T}; \vec{N}; \vec{B}\}$ di Frenet-Serre è costruita sulla curva β seguendo il procedimento descritto nel paragrafo precedente; a questo punto, la base mobile in $t_0 \in [a; b]$ coincide con quella nel punto s_0 tale che $t_0 = t(s_0)$. La definizione è buona: ad ogni punto t_0 dell'intervallo $[a; b]$ (per la parametrizzazione a velocità arbitraria) corrisponde un unico punto s_0 per la parametrizzazione a velocità unitaria. Dunque, è naturale porre $\vec{T}(t_0) = \vec{T}(s_0)$; $\vec{N}(t_0) = \vec{N}(s_0)$; $\kappa(t_0) = \kappa(s_0)$; $\vec{B}(t_0) = \vec{B}(s_0)$; $\tau(t_0) = \tau(s_0)$ e i membri di destra sono già stati definiti, perchè si riferiscono ad una curva a velocità unitaria. Il problema è quello di calcolare direttamente $\vec{T}(t_0)$; $\vec{N}(t_0)$; $\vec{B}(t_0)$; $\kappa(t_0)$; $\tau(t_0)$, senza scrivere esplicitamente l'espressione di β (che potrebbe essere molto più complicata di α).

Nel punto $t_0 = t(s_0)$, abbiamo $\vec{\beta}'(s_0) = \vec{\alpha}'(t_0) \cdot t'(s_0)$. Per la dimostrazione del teorema sull'esistenza dell'ascissa curvilinea, sappiamo che $s'(t_0) = \|\alpha'(t_0)\| = v(t_0)$. Poichè $t(s)$ è la funzione riparametrizzazione inversa, $t'(s_0) = \frac{1}{\|\alpha'(t_0)\|} = \frac{1}{v(t_0)}$. v è la funzione velocità. Di conseguenza,

$$\vec{T}(t_0) = \vec{T}(s_0) = \vec{\beta}'(s_0) = \frac{\vec{\alpha}'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}.$$

Inoltre,

$$\vec{\alpha}'(t) = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{\beta}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{T}v,$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}''(t) &= \frac{d\vec{T}}{dt}v + \vec{T}\frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt}v + \vec{T}\frac{dv}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}v^2 + \vec{T}\frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

La condizione che $\frac{d\vec{T}}{ds} \neq 0$ equivale alla condizione che $\overrightarrow{\alpha'}(t)$ e $\overrightarrow{\alpha''}(t)$ siano **linearmente indipendenti**. Supponiamo dunque che questa condizione sia verificata. Sostituiamo $\kappa\vec{N}$ al posto di $\frac{d\vec{T}}{ds}$.

$$\overrightarrow{\alpha''}(t_0) = \kappa(t_0)v^2(t_0)\overrightarrow{N}(t_0) + \overrightarrow{T}(t_0)\frac{dv}{dt}.$$

Calcoliamo ora il seguente prodotto esterno:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha'}(t_0) \wedge \overrightarrow{\alpha''}(t_0) &= (v\overrightarrow{T}) \wedge \left(\kappa v^2 \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \frac{dv}{dt} \right) = \\ &= (v\overrightarrow{T}) \wedge (\kappa v^2 \overrightarrow{N}) + (v\overrightarrow{T}) \wedge \left(\overrightarrow{T} \frac{dv}{dt} \right) = \\ &= \kappa v^3 \left((\overrightarrow{T}) \wedge (\overrightarrow{N}) \right) + \frac{dv}{dt} v (\overrightarrow{T}) \wedge (\overrightarrow{T}) = \\ &= \kappa v^3 (\overrightarrow{B}) + 0. \end{aligned}$$

Poichè \overrightarrow{B} ha lunghezza 1, $\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\| = \kappa v^3$, ovvero

$$\kappa = \frac{\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

Inoltre, \overrightarrow{B} è parallelo ad $\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}$, dunque, essendo v e κ positivi,

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}}{\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\|}.$$

Resta da calcolare da torsione. Calcoliamo

$$\langle \overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}; \overrightarrow{\alpha'''} \rangle,$$

dove $\langle \cdot; \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 . Poichè $\{\overrightarrow{T}; \overrightarrow{N}; \overrightarrow{B}\}$ è una base ortonormale per ogni valore del parametro, e $\overrightarrow{\alpha'}(t_0) \wedge \overrightarrow{\alpha''}(t_0)$ è parallelo a $\overrightarrow{B}(t_0)$, sarà sufficiente calcolare la componente di $\overrightarrow{\alpha'''}(t_0)$ nella direzione di \overrightarrow{B} .

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha'''}(t_0) &= \kappa(t_0) v^2(t_0) \left(\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{N}(t) \right) \right) (t_0) + \dots = \\
&= \kappa(t_0) v^2(t_0) \left(\frac{d}{ds} \left(\overrightarrow{N}(t(s)) \right) (s_0) \cdot \frac{ds}{dt}(t_0) \right) + \dots = \\
&= \kappa(t_0) v^3(t_0) \left(-\kappa(s_0) \overrightarrow{T}(s_0) + \tau(s_0) \overrightarrow{B}(s_0) \right) + \dots = \\
&= \kappa(t_0) \tau(t_0) v^3(t_0) \overrightarrow{B}(t_0) + \dots
\end{aligned}$$

Infatti, per definizione, $\overrightarrow{B}(s_0) = \overrightarrow{B}(t_0)$.

Omettendo la dipendenza dal punto t_0 per brevità,

$$\overrightarrow{\alpha'''} = \kappa \tau v^3 \overrightarrow{B} + \dots$$

La parte omessa è perpendicolare a \overrightarrow{B} . Così,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}; \overrightarrow{\alpha'''} \rangle &= \langle \kappa v^3 \overrightarrow{B}; \kappa \tau v^3 \overrightarrow{B} \rangle = \kappa^2 \tau v^6 = \\
&= \left(\frac{\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\|}{\|\alpha'\|^3} \right)^2 \tau \|\alpha'\|^6 = \left(\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\| \right)^2 \tau.
\end{aligned}$$

Dividendo per $\left(\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\| \right)^2$, si ha:

$$\tau = \frac{\langle \overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}; \overrightarrow{\alpha'''} \rangle}{\left(\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\| \right)^2}.$$

Ricapitolando:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T} &= \frac{\overrightarrow{\alpha'}}{\|\alpha'\|}; \\
\overrightarrow{B} &= \frac{\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}}{\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\|}; \\
\overrightarrow{N} &= \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{T}; \\
\kappa &= \frac{\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\|}{\|\alpha'\|^3}; \\
\tau &= \frac{\langle \overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}; \overrightarrow{\alpha'''} \rangle}{\left(\|\overrightarrow{\alpha'} \wedge \overrightarrow{\alpha''}\| \right)^2}.
\end{aligned}$$

In tutte queste formule è stata omessa l'indicazione esplicita della dipendenza dal punto t_0 . Le derivate sono tutte intese rispetto al parametro t rispetto al quale la curva ha velocità arbitraria.