CURVE

Definizione 0.1. *Si dice curva regolare un'applicazione t$\longrightarrow\gamma$(t) da un intervallo aperto]a,b[allo spazio S, che sia (molte volte)derivabile con derivata (prima) non nulla in ogni punto t.*

Se consideriamo un altro intervallo reale aperto]c,d[ed una funzione ϕ derivabile con inversa derivabile tra]c,d[e]a,b[,allora γoϕ *è* una curva regolare la cui immagine in S *è* identica a quella di γ;*è* avvenuto solo un cambiamento di parametro. Nota che ϕ',essendo sempre $\neq$0, *è* sempre o positiva, in tal caso la nuova curva ha lo stesso senso di percorrenza della prima ,o negativa,in tal caso la nuova curva viene percorsa nel senso opposto a quella iniziale.

Definizione 0.2. *Si dice campo di vettori lungo la curva γ un'applicazione derivabile Y :]a,b[$\longrightarrow$ S$\times$S, tale che Y(t)$\in$ γ(t)$\times$S.*

Definizione 0.3. *Il campo di vettori tangente alla curva γ è il campo Y(t)=(γ(t),γ'(t)).*

D'ora in avanti trascureremo di scrivere il punto di applicazione γ(t).

L'ascissa curvilinea

Definizione 0.4. *Il parametro t della curva t$\longrightarrow\gamma$(t)si dice ascissa cuvilinea della curva se ,per ogni t, si ha $\mid \gamma'(t) \mid$ = 1.*

Si dice allora che la velocit*à* della curva *è* 1.

Definizione 0.5. *La lunghezza di γ in un intervallo [c,d]$\subset$]a,b[è $\int_c^d \mid \gamma'(t) \mid dt$*

Teorema 0.1. *Per ogni curva regolare esiste un parametro che ne sia ascissa curvilinea.*

prova.

Il teorema significa che ,data la curva regolare γ(t),*è* possibile trovare una funzione ϕ derivabile con inversa derivabile ψ(t) da un intervallo]c,d[ad]a,b[in modo che la curva γoϕ abbia velocit*à* uguale ad 1. Denomineremo con s il nuovo parametro,ascissa curvilinea, che varia tra c e d .Per trovare ϕ basta risolvere

$|(\gamma$'o$\phi)\phi$'(s)$|$ = 1

ovvero trovare ϕ tale che

$|1/\phi$'(s)$|$ = $|(\gamma$'o$\phi)$(s)$|$.

La soluzione $\grave{e}$ data da ψ:]a,b[$\longrightarrow$]c,d[

ψ(t)=$\int_{t_o}^{t} \mid \gamma'(t) \mid \ dt$

Nota che l'ascissa curvilinea non $\grave{e}$ univocamente determinata,essa $\grave{e}$ data a meno di una costante additiva e a meno del segno (il che corrisponde ai due diversi sensi di percorrenza della curva)

Il sistema di riferimento mobile di Frenet-Serre.

Supponiamo che la curva γ sia parametrizzata dalla sua ascissa curvilinea s , ovvero

$\mid \gamma'(s) \mid = 1.$

Cerchiamo in ogni punto della curva un sistema di assi cartesiani positivamente orientati che sia "adeguato alla curva nel punto", dando tre versori significativi per la curva.

Il primo versore $\grave{e}$ in ogni punto della curva

T(s)=γ'(s).

Scriviamo T(s) per il campo di vettori lungo la curva :(γ(s),γ'(s)).

Deivare T(s) rispetto ad s ,ha il significato di valutare quale sia la variazione della direzione tangente alla curva in relazione alla variazione del parametro , e quindi ci dice in sostanza quanto si incurvi la curva γ nel punto γ(s).Se tale derivata ,che chiameremo vettore di curvatura, non si annulla mai lungo la curva ,allora si procede nel modo seguente. Analiticamente si ha ***La prima equazione di Frenet-Serre.***

$$\frac{dT}{ds}(s) = kN(s)$$

dove N(s) $\grave{e}$ in ogni punto γ(s) un versore perpendicolare a T(s);infatti si ha

$$< \frac{dT}{ds}(s), T(s) >= 0$$

ed $\grave{e}$ quindi sufficiente scrivere

$$k(s) =\mid \frac{dT}{ds}(s) \mid$$

e definire

$$N(s) = \frac{dT}{ds}(s)/k(s)$$

. k(s) si dice curvatura della curva.

Il campo di vettori s⟶N(s) si chiama ***la normale alla curva.***

Notiamo che ,se la curva giace in un piano di equazione ax+by+cz+d=0, allora scrivendo i vettori secondo le loro componenti rispetto agli assi di S, si ha

a γ_1(s)+bγ_2(s)+cγ_3(s)+d=0

e , derivando rispetto ad s,
a γ'_1(s)+bγ'_2(s)+cγ'_3(s)=0

e
a γ''_1(s)+bγ''_2(s)+cγ''_3(s)=0

e cos $\grave{i}$ via per le derivate successive.

Dunque la direzione tangente T(s) e quella normale N(s)appartengono entrambi alla giacitura del piano dove giace la curva , se la curva *è* piana e se T'(s)$\neq$0,allora T(s) e N(s) determinano lungo ogni punto della curva un medesimo piano e la curva giace in tale piano.In tal caso, la derivata di N(s) rispetto al parametro s sarebbe ancora una direzione della giacitura determinata da T(s) e N(s).

In generale derivando rispetto ad s il campo di vettori N(s) misureremo quanto la curva si discosti dallo stare nel piano generato da T(s) e N(s) , che chiameremo d'ora in avanti,***piano osculatore.***

Si ha

$$< \frac{dN}{ds}(s), N(s) >= 0$$

e quindi, ***La seconda equazione di Frenet-Serre.***

$$\frac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

dove B(s)*è* un versore perpendicolare al piano osculatore. Il suo verso *è* scelto in modo che la terna T(s), N(s) ,B(s) sia positivamente orientata.Inoltre τ(s), che chiameremo torsione della curva misura lo spostamento della curva dal piano osculatore mentre B(s) viene chiamato ***la binormale alla curva.***

Derivando rispetto ad s il campo di vettori B(s), si ottiene ***la terza equazione di Frenet-Serre.***

$$\frac{dB}{ds}(s) = -\tau(s)N(s)$$

Il sistema di riferimento T(s), N(s) ,B(s) si dice riferimento di Frenet -Serre nel punto γ(s).

Teorema 0.2. *La curva γ sia tale che*

$$\frac{dT}{ds} \neq 0$$

;allora la curva è piana se e solo se τ è identicamente nulla.

prova. Se la curva giace su un piano abbiamo dimostrato che esso è il piano osculatore della curva e che dN/ds è una direzione del piano osculatore e dunque il coefficiente di B(s) deve essere nullo nella seconda equazione di F.-S. Viceversa se s$\longrightarrow \tau(s)$ si annulla identicamente allora ,dalla terza equazione di F.-S. il campo B(s) si mantiene costante lungo la curva,dando un versore B. Ora consideriamo la funzione s $\longrightarrow < B, \gamma(s) >$ e deriviamola rispetto ad s . Tenendo conto della prima equazione di F.-S. otteniamo che tale funzione è una costante che denominiamo d e quindi la curva giace nel piano di equazione b_1 x+b_2 y +b_3 z +d =0.

Bisogna fare attenzione perchè il teorema non vale quando il vettore curvatura si annulla in qualche punto della ,infatti in questi punti può capitare che la curva cambi il piano su cui giace a pezzi:il seguente esempio mostra la situazione:

$$g(t) = \begin{cases} (h(t), 0, t) & \text{se} \quad t > 0 \\ (t, h(t), 0) & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

dove h(t) = $exp(-1/t^2)$ per t$\neq$ 0, h(t)=0 per t=0.

Osservazione sulle curve piane.

Se la curva è piana e dT/ds $\neq$ 0, sappiamo che giace nel suo piano osculatore che si mantiene identico lungo tutta la curva, la torsione è nulla e il versore binormale è costante.In generale vale il seguente

Teorema 0.3. *il vettore di curvatura è identicamente nulla se e solo se la curva è un pezzo di retta.*

prova Se k(s)=0 per ogni s, allora si ha dT/ds =0 ,dunque il versore T(s) si mantiene costante = T lungo la curva . Si ha allora

γ'(s)=T

da cui integrando si ricava γ(s)=Ts + c dove c *è* una costante. Viceversa , se la curva è un pezzo di retta allora è evidente che dT/ds è identicamente nullo.

E' facile provare che se una curva η *è* immagine tramite una isometria che mantenga l'orientazione di S di una curva regolare γ,allora le due curve hanno la stessa curvatura e la stessa torsione nei punti che si corrispondono:

infatti se scriviamo l'isometria di S come l'applicazione

X = (x,y,z) $\longrightarrow$ AX + C

dove A $\in$ SO(3) e C *è* un vettore fissato di S,

si vede subito che la curva η(t) = Aγ(t) + C ha la stessa ascissa

curvilinea diγ(t) e il suo riferimento mobile *è* AT(s),AN(s),AB(s) .Dunque, derivando si ottiene subito che le equazioni di F.-S. soddisfatte da tale terna mobile hanno come coefficienti la curvatura k(s) e la torsione τ(s) di γ(t). Vale anche il viceversa completando il teorema seguente(che non dimostriamo)

Teorema 0.4. *Due curve η(t) e γ(t) hanno stessa curvatura e stessa torsione in punti corrispondenti al medesimo t se e solo se esiste una isometria di S,che preserva l'orientazione, che trasforma η(t) in γ(t).*

Vediamo ora come si possono esprimere la terna di F-S. , la curvatura e la torsione rispetto ad un parametro t qualunque. Sia data la curva regolare t$\longrightarrow\gamma$(t), s=ψ(t) ne sia l'ascissa curvilinea e sia t=ϕ(s).Allora si ha T(s)=(γoϕ)'(s)=γ'(t)/|γ'(t)| per t=ϕ(s).

γ"(t)=(d(|γ'(t)|)/dt) T(s)+ |γ'(t)|d(T(s))/dt da cui si ricava:

γ'(t)$\wedge\gamma$"(t)=|γ'(t)| $^2\gamma$'(t)$\wedge$dT(s)/ds = k |γ'(t)| ^{3}B(s)

da cui ricaviamo:

k(γ(t))=|γ'(t)$\wedge\gamma$"(t)|/|γ'(t)|^3

B(γ(t))=γ'(t)$\wedge\gamma$"(t)/|γ'(t)$\wedge\gamma$"(t)|

N= B$\wedge$T.

Inoltre ,da

γ"'= (d^2|γ'(t)|/dt^2)T(s)+ 3(d|γ'(t)|/dt)dT/ds|γ'(t)|+ |γ'(t)|^{3}d^{2}T/ds^2

che implica
γ'(t)$\wedge\gamma$''(t).γ'''(t)=k$|\gamma$'(t)$|^5$B.($|\gamma$'(t)$|$ d^2T/ds^2)=k^2 $\tau|\gamma$'(t)$|^6$
da cui ricaviamo la torsione
$\tau(\gamma$(t))=γ'(t)$\wedge\gamma$''(t).γ'''(t)/$|\gamma$'(t)$\wedge\gamma$''(t)$|^2$