Geometria non lineare nel piano.

Vogliamo cercare di risolvere due nuovi problemi:

1. Data una curva generica nel piano, associarle un'equazione del tipo $f(x;y) = 0$.
2. Capire quando una funzione $f(x;y) = 0$ rappresenta una curva nel piano (ed in tal caso studiare le proprietà della curva).

Osserviamo subito che questo secondo problema non ammette sempre una soluzione: ad esempio, l'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali, dunque rappresenta l'insieme vuoto nel piano $\mathbb{R}^2$.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 + y^4 - 2y^2 + 1 = 0$ si può riscrivere come:

$$x^2 + (y^2 - 1) = 0,$$

ed ammette pertanto come soluzioni solo una coppia di punti: $A = (0;1)$ e $B = (0;-1)$. In tal caso, diremo che la curva definita da tale equazione è costituita da soli due punti.

DEFINIZIONE

Una curva Γ si dice ALGEBRICA se si può rappresentare nella forma $f(x;y) = 0$, dove f è un POLINOMIO. Il grado del polinomio si dice ORDINE della curva Γ.

In particolare, le rette sono curve algebriche di ordine 1.

Le curve non algebriche si dicono TRASCENDENTI.

La circonferenza.

Fisso un punto $C = (a;b)$ nel piano ed un numero $r > 0$. La CIRCONFERENZA di CENTRO C e RAGGIO r è l'insieme di tutti i punti del piano che hanno distanza r dal centro C.

Tale condizione significa che, se $P = (x;y)$ è un generico punto del piano,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r;$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2;$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

Quest'ultima si dice EQUAZIONE della CIRCONFERENZA di CENTRO C e RAGGIO r.

L'equazione generale della circonferenza ha la forma:

$$\varphi x^2+\varphi y^2+\chi x+\psi y+\omega=0,\ \varphi\neq 0.$$
$$x^2+y^2+\frac{\chi}{\varphi}x+\frac{\psi}{\varphi}y+\frac{\omega}{\varphi}=0.$$

Posto $\alpha=\frac{\chi}{\varphi}$; $\beta=\frac{\psi}{\varphi}$; $\gamma=\frac{\omega}{\varphi}$, l'equazione della circonferenza assume la forma:

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

Il centro è $C=\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$, il raggio è $r=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma}$, a patto che $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma\geq 0$.

Se quest'ultima condizione non fosse verificata, allora la curva rappresenterebbe l'insieme vuoto.

OSSERVAZIONE

I punti della circonferenza di centro $C=(a;b)$ e raggio r sono tutti e soli i punti della forma $P=(x;y)$, con

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & a & + & r\cdot\cos(t) \\ & & & & \\ y & = & b & + & r\cdot\sin(t) \end{array}\right.,\ 0\leq t<2\pi.$$

ESERCIZI.

1) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C=(2;5)$ e raggio $r=1$.

2) Data la circonferenza $x^2+y^2-3x-7y-\frac{3}{2}=0$, trovare il centro ed il raggio.

3) Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti: $O=(0;0)$; $A=(2;1)$ e $B=(2;5)$, e calcolarne centro e raggio. Scrivere inoltre l'equazione della retta tangente a tale circonferenza nell'origine.

4) Determinare la retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ nel punto $P = (1; \sqrt{2})$. Determinare poi, se esistono, le rette tangenti alla circonferenza e passanti per il punto $Q = (3; 0)$.

5) Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro sulla retta $x+y = 0$ e passante per i punti $A = (2; 2)$ e $B = (0; 2)$.

6) Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro sulla retta $x-y = 0$ e passante per i punti $A = (1; 0)$ e $B = (0; 2)$; trovarne centro e raggio e scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza in A.

7) Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alla retta $x-2y+1 = 0$ nel punto $T = (1; 0)$ e passante per $A = (-1; 4)$; trovarne centro e raggio e scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza in A.

8) Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro sulla retta $x-2 = 0$ e tangente alla retta $x + y + 3 = 0$ nel punto $T = (0; -3)$;trovarne centro e raggio.

SOLUZIONI

1) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$.
2) $C = (\frac{3}{2}; \frac{7}{2})$. $r = 1$.
3) $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - 6y = 0$. $C = (-\frac{1}{4}; 3)$. $r = \frac{\sqrt{145}}{4}$.$x - 12y = 0$.
4) $y = -\sqrt{2}$. $\{r_1 : y - x + 3 = 0;\ r_2 : y + x - 3 = 0\}$.
5) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$.
6) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$. $C = (\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$. $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$. $x + 3y + 1 = 0$.
7) $x^2+y^2-4y-1 = 0$. $C = (0; 2)$. $r = \sqrt{5}$. Tangente in A: $y+2x-2 = 0$.
8) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$. $C = (2; -1)$. $r = 2\sqrt{2}$.